Az Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
2009-2010. tanévi harmadik, döntő fordulójának feladatmegoldásai
matematikából, a II. kategória számára

1. Az a, b és c valós paraméterekre teljesül, hogy $2a^2 + 2 + 3b + 6c = 0$. Igazoljuk, hogy a

$$(a^2 + 1)x^2 + bx + c = 0$$

egyenletnek van egynél kisebb, pozitív gyöke.

1. Megoldás: Az egyenletnek a diszkriminánsa $D = b^2 - 4(a^2 + 1)c$. A feltételből adódik, hogy $2a^2 + 2 = -3b - 6c$, ezt a diszkriminánssal összevetve

$$D = b^2 + 6cb + 12c^2 = (b + 3c)^2 + 3c^2.$$

A diszkrimináns két négyzet összege. $D = 0$ csak akkor lehet, ha $b = c = 0$, ekkor viszont a feladatban megadott feltétel nem teljesülhet. Így a diszkrimináns értéke pozitív, azaz két különböző valós gyöke van az egyenletnek az a, b és c paraméterek minden lehetséges értéke esetén. 2 pont

Jelölje az egyenlet gyökeit x_1 és x_2. A feladatban szereplő feltételt elosztjuk a biztosan pozitív $a^2 + 1$-gyel, majd a Viete formulákat felhasználva kapjuk

$$2 + \frac{3b}{a^2 + 1} + 6\frac{c}{a^2 + 1} = 2 - 3(x_1 + x_2) + 6(x_1 x_2) = 0.$$

Ezt átalakítva $3x_1 - 2 = 3x_2(2x_1 - 1)$. Ha $x_1 = \frac{1}{2}$, akkor az utóbbi egyenletünk 2 oldala nem egyenlő, tehát a továbbiakban $x_1 \neq \frac{1}{2}$. Ekkor

$$x_2 = \frac{3x_1 - 2}{3(2x_1 - 1)}. \tag{1}$$

2 pont

Az egyenlet x_2 gyöke pontosan akkor nem lesz egynél kisebb pozitív szám, amennyiben $x_2(x_2 - 1) \geq 0$. Ebbe a feltételbe beírjuk az (1)-ből kapott kifejezést

$$x_2(x_2 - 1) = \frac{3x_1 - 2}{3(2x_1 - 1)} \cdot \frac{1 - 3x_1)}{3(2x_1 - 1)} \geq 0. \tag{2}$$

A nevezőben pozitív szám áll, a számláló akkor lesz nem negatív, ha $\frac{1}{3} \leq x_1 \leq \frac{2}{3}$.

Az eddigieket összefoglalva megállapíthatjuk, hogy vagy $x_2 \in (0; 1)$, amennyiben pedig ez nem teljesül, akkor $x_1 \in [\frac{1}{3}; \frac{2}{3}]$, így a bizonyítást befejeztük. 3 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás: Tekintsük a $p(x) = (a^2+1)x^2 + bx + c$ polinomot, ennek értékei a 0, $\frac{1}{2}$ és 1 helyen

$$p(0) = c, \quad p\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{a^2+1}{4} + \frac{b}{2} + c, \quad p(1) = a^2 + 1 + b + c. \qquad \text{2 pont}$$

A feladatban megadott feltételt ezek segítségével is felírhatjuk

$$0 = 2a^2 + 2 + 3b + 6c = p(0) + 4p\left(\frac{1}{2}\right) + p(1). \qquad \text{2 pont}$$

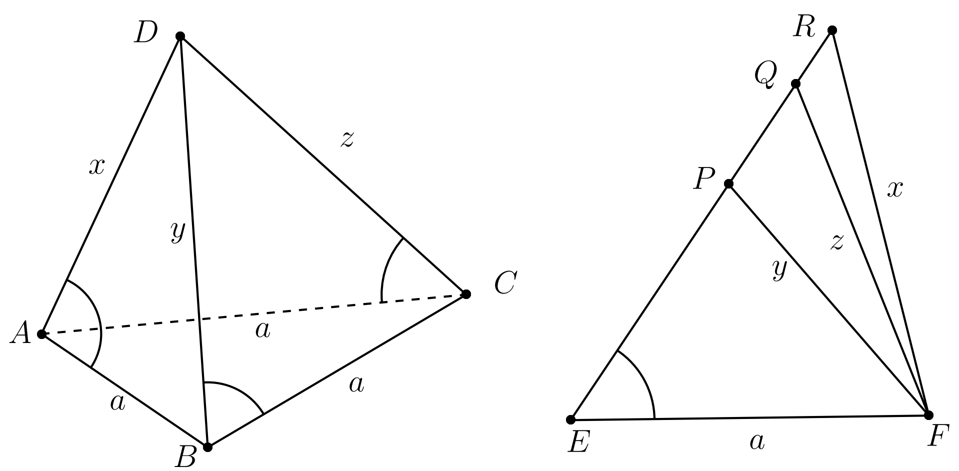
Mivel a $p(x)$ polinom másodfokú, ezért $p(0)$, $p(\frac{1}{2})$ és $p(1)$ nem lehet mindhárom 0. Ekkor az imént kapott összefüggésből következik, hogy van köztük pozitív is és negatív is. 2 pont

Mivel a polinom által meghatározott függvény folytonos, ezért a polinom értéke a (0;1) intervallumon belül valahol 0. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Az $ABCD$ tetraéderben $AB = BC = CA$. Bizonyítsuk be, hogy amennyiben $DAB\angle = DBC\angle = DCA\angle$, akkor $DA = DB = DC$.

Megoldás: Ha a DA, DB és DC közt van két egyenlő, akkor mindhárom egyenlő. Legyen $DA = DB$, ekkor az ABD és BCD háromszögek egybevágóak, hiszen két-két oldaluk és az általuk közrezárt szög egyenlő ($DA = DB$, $AB = BC$ és $DAB\angle = DBC\angle$). Ebből az következik, hogy $DB = DC$. 3 pont



A továbbiakban feltehető, hogy $DA < DB < DC$, jelöljük ezen szakaszok hosszát rendre $x < y < z$-vel. Fektessük egymásra a D-nél találkozó lapokat az ábra szerint úgy, hogy az ABD háromszög csúcsai rendre EFP, BCD csúcsai EFQ, CAD csúcsai EFR legyenek. Ekkor az FPR háromszögben $z = FQ$ a közrefogó oldalak nagyobbikánál kisebb lesz, $z < max(x; y)$. Ez viszont ellentmond annak, hogy $x < y < z$. Feltevésünk ellentmondáshoz vezetett, így $DA = DB = DC$. 4 pont

Összesen: 7 pont

3. Egy társas összejövetelen n ember vett részt. A társaság tagjai közül időnként leült három ember egy ultipartira. Hazamenetelkor megállapították, hogy bármely három ember legfeljebb egy partiban játszott együtt és bármely két ember pontosan két partiban vett részt együtt.

Milyen n értékekre lehetséges ez, ha $3 < n < 9$?

Megoldás: A feladatot gráfok segítségével oldjuk meg. Legyenek az emberek a gráf csúcsai. Ha három ember lejátszik egy partit, akkor húzzuk be a nekik megfelelő pontok között futó éleket. Így a feladat feltételei szerint az n pontú teljes gráf éleit éppen kétszeresen fedjük háromszögekkel úgy, hogy egy háromszög legfeljebb egyszer szerepelhet.

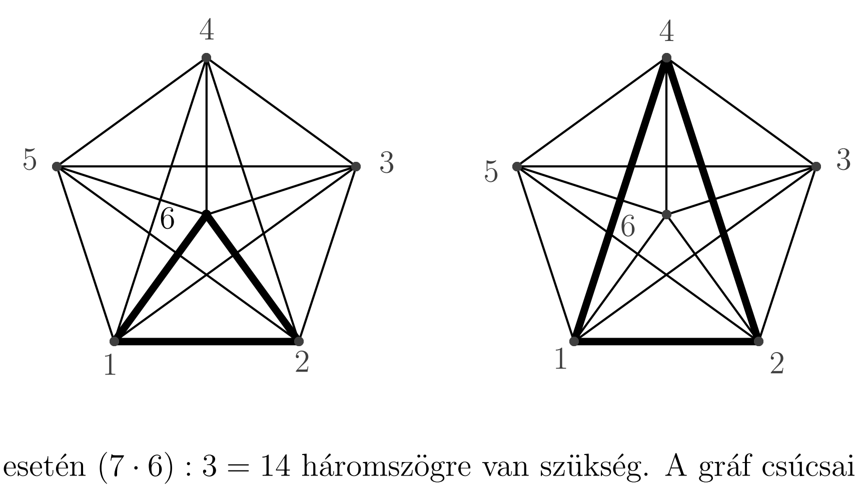
Az n pontú teljes gráfnak éleit kétszer számolva éppen $n(n-1)$-et kapunk, ennek 3-mal oszthatónak kell lennie. Ebből következik, hogy n nem lehet 5 és 8. Minden további szóba jöhető n értékre megadunk egy konstrukciót. 1 pont

Jelölje a továbbiakban a gráf csúcsait az 1, 2, ..., n. Egy élet a két végpontjával adunk meg pl. (1;2), egy háromszöget a három csúcsával pl (1;3;4). Legyen $n = 4$, ekkor az élek számának kétszerese 12, így 4 háromszögre van szükség. A négy lehetséges háromszög éppen jó lesz, hiszen az 1,2,3,4 számok tetszőleges i, j, k, l permutációja esetén az $(i; j)$ él éppen két háromszögben lesz benne, mégpedig az $(i; j; k)$ és az $(i; j; l)$ háromszögben. 1 pont

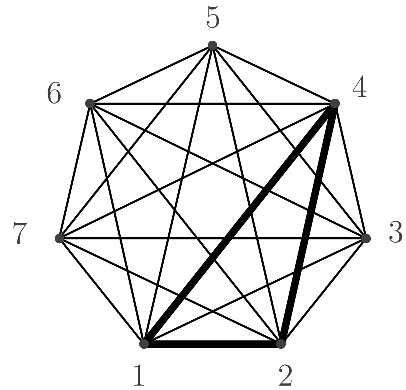
Az $n = 6$ esetén 30 az élek számának kétszerese, tehát 10 háromszög kell. Egy lehetséges megoldás a következő:

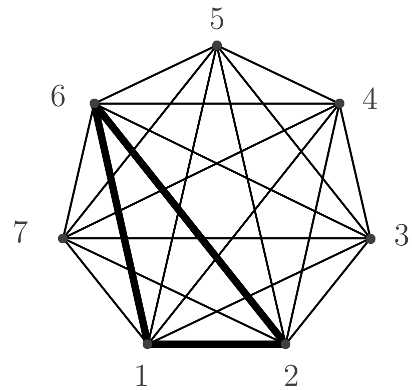
$(1; 2; 6)$	$(2; 3; 6)$	$(3; 4; 6)$	$(4; 5; 6)$	$(5; 1; 6)$
$(1; 2; 4)$	$(2; 3; 5)$	$(3; 4; 1)$	$(4; 5; 2)$	$(5; 1; 3)$

A konstrukciót könnyen ellenőrizhetjük, ha az 1,2,3,4,5 számokat egy szabályos ötszög csúcsainak feleltetjük meg, az ötszög középpontja pedig a 6. A 6-ból induló élek a fenti táblázat első sorában éppen kétszer szerepelnek. Az ötszög két szomszédos csúcsa közt futó él egyszer szerepel a felső, egyszer az alsó sorban, az ötszög átlói pedig éppen kétszer szerepelnek az alsó sorban. Ezt úgy is gondolhatjuk, hogy az ábrán látható két típusú háromszöget forgattuk körbe. 2 pont



Az $n = 7$ esetén $(7 \cdot 6) : 3 = 14$ háromszögre van szükség. A gráf csúcsai legyenek egy szabályos hétszög csúcsai. A csúcsok közt futó élek hossza három féle lehet és mindhárom típusból éppen 7 van. Az ábrán látható két háromszög körbeforgatása jó konstrukciót ad. Így ha i felveszi az 1,2,...,7 értékeket, akkor a háromszögeink $(i; i+1; i+3)$ és $(i; i+1; i+5)$, ahol mindig a számok hetes maradékát tekintjük. 3 pont





Összesen: 7 pont