



Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny 2009–2010-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

Az első (iskolai) forduló feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Igazoljuk, hogy egy 2009 csúcsú teljes gráf élei megszámozhatók az $1, 2, \dots, \binom{2009}{2}$ számokkal úgy, hogy az egy csúcsba befutó élek számainak az összege semelyik két csúcsnál se legyen azonos.
2. Szerkesszünk háromszöget, ha ismert egy oldala, továbbá a beírt és a körülírt kör sugara. (Feltesszük, hogy létezik a megadott adatokkal háromszög, így a megoldhatóság feltételét nem kell vizsgálni, csak a megoldások számát.)
3. Oldjuk meg a $(2x + 2)(5 - 2x)(4x^2 + 8x + 11) = 10(2x + 3)^2$ egyenletet a valós számok körében.
4. Egy pozitív egész számot négyzetteljesnek nevezünk, ha a törzstényező felbontásában minden prím legalább a második hatványon szerepel. Bizonyítsuk be, hogy végtelen sokszor lesz két szomszédos szám mindegyike négyzetteljes.
5. Egységnyi területű háromszögben helyezünk el két egymásba nem nyúló egyenlő sugarú körlemez úgy, hogy együtt minél nagyobb területet fedjenek le. Az egységnyi területű háromszögek közül milyen alakú háromszög esetén lesz ez a lefedett terület a legnagyobb?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.