Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2010–2011-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 13 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a Versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2010. december — A versenybizottság

1. feladat

Egy 2010×2010-es táblázat mezőibe úgy akarunk (nem feltétlenül különböző) egész számokat beírni, hogy minden sorban és minden oszlopban a számok összege különböző legyen (azaz 4020 különböző összeget kapjunk). Legkevesebb hányféle szám beírásával tudjuk ezt elérni?

Megoldás: Két szám (a és b) nem elegendő, ugyanis ezekből legfeljebb 2011-féle 2010 tagú összeg készíthető: $ka + (2010 - k)b$, $0 \le k \le 2010$. (3 pont)

Három szám viszont már elegendő, megfelel például az alábbi konstrukció. Osszuk fel a táblázatot négy 1005×1005-ös részre, a bal felsőben a főátlóban és alatta 1-esek, fölötte 0-k szerepeljenek, a jobb alsóban a főátlóban és alatta minden elem legyen 2011, fölötte 0, a bal alsóban minden elem 1-es, a jobb felsőben pedig minden elem 0. (3 pont)

Ekkor az első 1005 sorban az elemek összege rendre 1, 2, …, 1005, az utolsó 1005 sorban $2011 + 1005$, $2 \cdot 2011 + 1005$, …, $1005 \cdot 2011 + 1005$, az első 1005 oszlopban rendre 2010, 2009, …, 1006, az utolsó 1005 oszlopban pedig rendre $1005 \cdot 2011$, $1004 \cdot 2011$, …, $1 \cdot 2011$, amelyek valóban mind különbözők. (1 pont)

2. feladat

Legyen $0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_n < 1$. Igazolja, hogy

$$x_1(1-x_1) + (x_2-x_1)(1-x_2) + (x_3-x_2)(1-x_3) + \cdots + (x_n - x_{n-1})(1-x_n) < \frac{1}{2}\,.$$

Első megoldás: A bal oldalon álló kifejezést jelölje S, ekkor a beszorzásokat és összevonásokat elvégezve

$$S = x_n - (x_1^2 + \cdots + x_n^2) + (x_1x_2 + x_2x_3 + \cdots + x_{n-1}x_n)$$

adódik. (2 pont)

Ezt alakítsuk át a következőképpen:

$$S = x_n - \frac{1}{2}\Big((x_1-x_2)^2 + (x_2-x_3)^2 + \cdots + (x_{n-1}-x_n)^2\Big) - \frac{x_1^2}{2} - \frac{x_n^2}{2}\,. \qquad \text{(3 pont)}$$

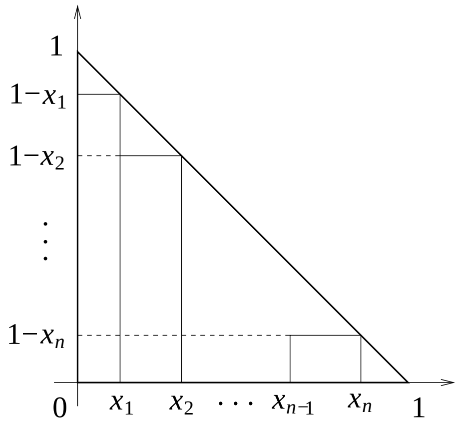
Nyilván $S < x_n - x_n^2/2 = -(x_n-1)^2/2 + 1/2 < 1/2$, amivel a bizonyítást befejeztük. (2 pont)

Második megoldás: Vezessük be az $a_1 = x_1$, $a_2 = x_2 - x_1$, $\ldots$, $a_n = x_n - x_{n-1}$, $a_{n+1} = 1 - x_n$ jelöléseket, ezzel a bal oldalon álló S kifejezés a következő alakba írható:

$$S = a_1(a_2 + a_3 + \cdots + a_{n+1}) + a_2(a_3 + \cdots + a_{n+1}) + \cdots + a_na_{n+1}. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ekkor $1 = (a_1 + \cdots + a_{n+1})^2 = (a_1^2 + \cdots + a_{n+1}^2) + 2S$, és ebből $S < 1/2$. (4 pont)

Harmadik megoldás: Rajzoljuk meg azt az egyenlő szárú derékszögű háromszöget, amelynek csúcsai az origó, az $(1,0)$ és a $(0,1)$ pontok, és írjunk bele téglalapokat az ábrán látható módon.



(4 pont)

Ekkor a beírt téglalapok összterülete éppen az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezés. (2 pont)

Ez nyilván kisebb, mint a háromszög területe, azaz $1/2$. (1 pont)

Negyedik megoldás: Az előző megoldás ábrája és gondolatmenete alapján a szóban forgó összeg éppen az $f(x) = 1 - x$ függvény 0 és 1 közötti integráljának egyik alsó közelítő összege, és így kisebb, mint az integrál, ami $1/2$. (7 pont)

Megjegyzés: Az 1/2-es korlát pontos, bármilyen kisebb értéket a helyére írva az állítás nem marad igaz; ez legegyszerűbben a harmadik (és negyedik) megoldás ábrájáról olvasható le, de a többi megoldásból is könnyen adódik.

3. feladat

Keresse meg az összes olyan p prímszámot, melyhez léteznek olyan a, b, c egész számok, hogy $a^2 + b^2 + c^2 = p$ és $(a^4 + b^4 + c^4)$ osztható p-vel.

Megoldás: $p = 2$ és 3 megfelel $a = b = 1, c = 0$, illetve $a = b = c = 1$ választással.
(1 pont)

Megmutatjuk, hogy más prímszám nem teljesíti a feltételeket. Indirekt tegyük fel, hogy valamely $p > 3$ prímhez is találnánk ilyen $a \geq b \geq c \geq 0$ egészeket. Nyilván nem fordulhat elő, hogy $b = c = 0$ vagy $a = b = c$. A $p - a^2 = b^2 + c^2$ egyenlőséget négyzetre emelve $p^2 - 2pa^2 + a^4 = b^4 + c^4 + 2b^2c^2$ adódik, azaz $(b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - a^4)$ osztható p-vel.
(1 pont)

Innen következik, hogy $(a^4 + b^4 + c^4) - (b^4 + c^4 + 2b^2c^2 - a^4) = 2(a^4 - b^2c^2) =$
$= 2(a^2 - bc)(a^2 + bc)$ is osztható p-vel. (2 pont)

Mivel $p > 2$ és prím, ezért p osztója $a^2 - bc$-nek vagy $a^2 + bc$-nek. (1 pont)

Az első nem lehet, mert $p = a^2 + b^2 + c^2 > a^2 - bc > 0$. (1 pont)

A második szintén lehetetlen, mert $0 < a^2 + bc < a^2 + b^2 + c^2 = p$. (1 pont)

4. feladat

Egy n-elemű H halmaznak kiválasztottuk néhány k-elemű részhalmazát $(3 \leq k \leq n)$ úgy, hogy H bármely két elemét pontosan három darab, bármely három elemét pontosan két darab kiválasztott részhalmaz tartalmazza. Határozza meg n és k lehetséges értékeit.

Megoldás: Legyenek $H_1, \ldots, H_j$ a kiválasztott k-elemű részhalmazok. Számoljuk meg kétféleképpen, hányszor fordul elő, hogy valamelyik H_i tartalmazza H valamely elempárját (minden egyes ilyen tartalmazási relációt külön számolva). Mivel az $\binom{n}{2}$ elempár mindegyike pontosan 3 db H_i-ben van benne, ezért a keresett szám $3\binom{n}{2}$. Másfelől egy H_i-ben $\binom{k}{2}$ elempár van, tehát a keresett szám $j\binom{k}{2}$. Így

$$3\binom{n}{2} = j\binom{k}{2}. \qquad \text{(2 pont)}$$

A másik feltételből hasonlóan adódik, hogy

$$2\binom{n}{3} = j\binom{k}{3}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A második egyenlőség 3-szorosát az első egyenlőséggel elosztva kapjuk, hogy $2(n - 2)/3 = k - 2$, azaz $n = (3/2)k - 1$. Innen $k = 2t$ és $n = 3t - 1$ valamilyen $t \geq 2$ egészre.
(1 pont)

Ezt írjuk vissza az első egyenlőség 2-szeresébe: $3(3t-1)(3t-2) = 2jt(2t-1)$. Megmutatjuk, hogy $2t-1$ mind $3t-1$-hez, mind $3t-2$-höz relatív prím. Valóban, ha $d = (2t-1, 3t-1)$, akkor $d \mid 2(3t-1) - 3(2t-1) = 1$, és hasonlóan ha $f = (2t-1, 3t-2)$, akkor $f \mid 3(2t-1) - 2(3t-2) = 1$. Ezért $2t-1 \mid 3$, azaz $t > 1$ miatt csak $2t-1 = 3$ lehet. Innen $t = 2$, $n = 5$, $k = 4$ és $j = 5$. (2 pont)

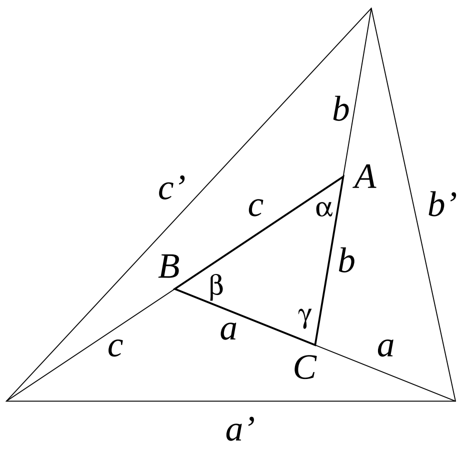
Vagyis csak egy ötelemű halmaz összes négyelemű részhalmaza jöhet szóba. Ez valóban megfelel, hiszen bármely két elem pontosan azokban a négyelemű részhalmazokban van benne, amelyeket ehhez a két elemhez a maradék három elem közül kettőnek a hozzávételével nyerünk, és hasonlóan látható a másik feltétel teljesülése is. (1 pont)

5. feladat

(a) Tükrözzük az ABC háromszög A csúcsát B-re, B-t C-re és C-t A-ra. Igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta háromszög szabályos, akkor az eredeti háromszög is szabályos?

(b) Tükrözzük az $ABCD$ tetraéder A csúcsát B-re, B-t C-re, C-t D-re és D-t A-ra. Igaz-e, hogy ha a tükörképek alkotta tetraéder szabályos, akkor az eredeti tetraéder is szabályos?

Első megoldás: (a)



Fejezzük ki a keletkező háromszög oldalainak négyzetét az ABC háromszöghöz csatlakozó három darab háromszögre felírt koszinusztétel segítségével:

$$a'^2 = c^2 + 4a^2 - 4ca\cos(180^\circ - \beta)$$
$$b'^2 = a^2 + 4b^2 - 4ab\cos(180^\circ - \gamma)$$
$$c'^2 = b^2 + 4c^2 - 4bc\cos(180^\circ - \alpha)$$

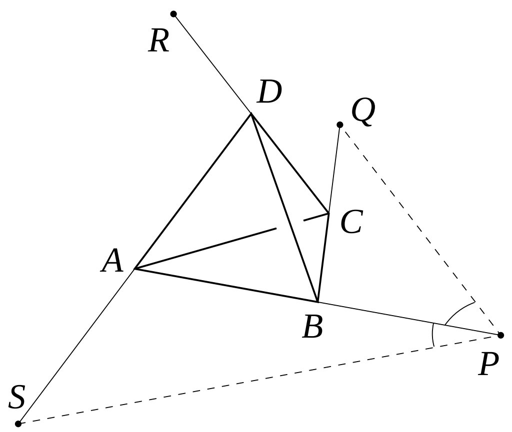
A $\cos(180^\circ - x) = -\cos x$ összefüggést, valamint az ABC háromszögbeli koszinusztételeket felhasználva az

$$a'^2 = 6a^2 - 2b^2 + 3c^2$$
$$b'^2 = 3a^2 + 6b^2 - 2c^2$$
$$c'^2 = -2a^2 + 3b^2 + 6c^2$$

kifejezéseket kapjuk. (2 pont)

Ha ez a három mennyiség egyenlő, akkor az első 8-szorosából a második 3-szorosának és a harmadik 5-szörösének az összegét levonva nullát kell kapnunk. A jobb oldalon ezeket a műveleteket elvégezve a c^2-et tartalmazó tagok kiesnek, és $49a^2 - 49b^2$ marad, ahonnan $a = b$ következik. Hasonlóan kapható két másik oldalhossz egyenlősége is, így tehát az ABC háromszög szabályos. (1 pont)

(b) Legyen a kiindulási $ABCD$ tetraéder szabályos, és legyenek a kapott tükörkép-pontok rendre P, Q, R és S.



Ekkor az APS és a BQP háromszög két oldal és a közbezárt 120°-os szög egyenlősége alapján egybevágó, így $PS = PQ$. (1 pont)

Ugyancsak e két háromszög egybevágósága miatt az APS és az APQ szögek összege 60°. Mivel azonban a két szög nincs egy síkban, az SPQ szög kisebb 60°-nál. Emiatt a PQS háromszög nem szabályos, és ezért a $PQRS$ tetraéder sem szabályos. (2 pont)

Szabályos tetraéderből kiindulva tehát nem kaphatunk szabályos tetraédert, így ha a tükörképek alkotta tetraéder szabályos, akkor az eredeti tetraéder biztosan nem szabályos. (1 pont)

Második megoldás: (a) Legyenek a tükörképek alkotta szabályos háromszög csúcsainak a helyvektorai rendre $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$, és legyenek az élei egységnyiek. Az ABC háromszög csúcsaiba mutató $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ helyvektorokkal kifejezve

$$\begin{aligned} 2\mathbf{b} - \mathbf{a} &= \mathbf{p}\,, \\ 2\mathbf{c} - \mathbf{b} &= \mathbf{q}\,, \\ 2\mathbf{a} - \mathbf{c} &= \mathbf{r}\,. \end{aligned}$$

(1 pont)

Adott $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ mellett az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$ vektorokat ennek a vektoregyenlet-rendszernek a megoldása útján kaphatjuk. A megoldás:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{p} + 2\mathbf{q} + 4\mathbf{r}}{7}\,, \qquad \mathbf{b} = \frac{\mathbf{q} + 2\mathbf{r} + 4\mathbf{p}}{7}\,, \qquad \mathbf{c} = \frac{\mathbf{r} + 2\mathbf{p} + 4\mathbf{q}}{7}\,.$$

(1 pont)

Ebből az ABC háromszög oldalainak hosszára az

$$\begin{aligned}
|\mathbf{a}-\mathbf{b}| &= \frac{1}{7}\,|\,2(\mathbf{r}-\mathbf{p})+(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|,\\
|\mathbf{b}-\mathbf{c}| &= \frac{1}{7}\,|\,2(\mathbf{p}-\mathbf{q})+(\mathbf{r}-\mathbf{q})\,|,\\
|\mathbf{c}-\mathbf{a}| &= \frac{1}{7}\,|\,2(\mathbf{q}-\mathbf{r})+(\mathbf{p}-\mathbf{r})\,|
\end{aligned}$$

képleteket kapjuk. Mindhárom kifejezésben két egymással $60°$-os szöget bezáró vektor szerepel, amelyek hossza 2, illetve 1. Az oldalak tehát egyenlők, az ABC háromszög szabályos. (1 pont)

(b) Tegyük fel, hogy a tükörkép-pontok szabályos tetraédert feszítenek ki, és legyenek a csúcsok helyvektorai rendre $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$, $\mathbf{r}$ és $\mathbf{s}$. A keresett eredeti $ABCD$ tetraéder csúcsainak helyvektorai a

$$\begin{aligned}
2\mathbf{b}-\mathbf{a} &= \mathbf{p}\,,\\
2\mathbf{c}-\mathbf{b} &= \mathbf{q}\,,\\
2\mathbf{d}-\mathbf{c} &= \mathbf{r}\,,\\
2\mathbf{a}-\mathbf{d} &= \mathbf{s}
\end{aligned}$$

vektoregyenlet-rendszer megoldásai:

$$\begin{aligned}
\mathbf{a} &= \frac{\mathbf{p}+2\mathbf{q}+4\mathbf{r}+8\mathbf{s}}{15}\,, \quad & \mathbf{b} &= \frac{\mathbf{q}+2\mathbf{r}+4\mathbf{s}+8\mathbf{p}}{15}\,,\\
\mathbf{c} &= \frac{\mathbf{r}+2\mathbf{s}+4\mathbf{p}+8\mathbf{q}}{15}\,, \quad & \mathbf{d} &= \frac{\mathbf{s}+2\mathbf{p}+4\mathbf{q}+8\mathbf{r}}{15}\,.
\end{aligned}$$

(2 pont)

Megmutatjuk, hogy $AC \neq AB$. Az AC szakasz hossza:

$$|\mathbf{a}-\mathbf{c}| = \frac{1}{15}\,|\,3(\mathbf{r}-\mathbf{p})+6(\mathbf{s}-\mathbf{q})\,|\,.$$

Ebben a kifejezésben két merőleges egységvektor szerepel, ezért az $\mathbf{a}-\mathbf{c}$ vektor hosszának a négyzete $(3^2+6^2)/15^2 = 45/15^2$. Az AB szakasz hossza:

$$|\mathbf{a}-\mathbf{b}| = \frac{1}{15}\,|\,4(\mathbf{s}-\mathbf{p})+2(\mathbf{r}-\mathbf{p})+(\mathbf{q}-\mathbf{p})\,|\,.$$

Itt három, páronként $60°$-os szöget bezáró egységvektor szerepel, ezért az $\mathbf{a}-\mathbf{b}$ vektor hosszának a négyzete $\big(4^2+2^2+1^2+2\cdot(1/2)\cdot(4\cdot 2+2\cdot 1+1\cdot 4)\big)/15^2 = 35/15^2$.

Az $ABCD$ tetraéder két éle tehát különböző hosszú, így nem lehet szabályos. (2 pont)