



Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2010–2011-es tanév

## MATEMATIKA, III. kategória

A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Az  $ABC$  derékszögű háromszög  $C$  csúcsából induló magasságának talppontja az  $AB$  átfogón  $D$ . A  $B$  csúcsból induló szögfelező a  $CD$  magasságot az  $E$ , az  $AC$  befogót az  $F$  pontban metszi. Igazoljuk, hogy  $AD > 2 \cdot EF$ .
2. Van-e olyan pozitív egész, amelynek pozitív osztói között 2011-szer annyi négyzetszám van, mint köbszám?
3. Anna és Bálint a következő játékot játsszák: Anna rajzol egy tetszőlegesen nagy üres (azaz él nélküli) gráfot, majd egyesével behúz tetszőleges éleket, amelyeket Bálint közvetlenül a behúzás után kékre vagy pirosra színez. További szabály, hogy az így keletkező gráfban minden csúcs foka legfeljebb  $k$  lehet, és  $k$  értékében előre megállapodnak. Melyik az a legkisebb  $k$ , amely mellett Anna ügyes játékkal mindenképpen létre tud hozni egy 2011 hosszúságú egyszínű utat?