Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2011–12-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

Az első forduló feladatainak megoldásai

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 13 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, **közvetlenül** az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 19. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a Versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2011. december — A versenybizottság

1. feladat

Adott három, nem egy egyenesbe eső pont, A, B és C. Hol helyezkednek el a térben azok a P pontok, amelyekre $AB^2+PC^2=BC^2+PA^2=CA^2+PB^2$?

Első megoldás: A tér egy P pontja pontosan akkor felel meg, ha a P-ből az A, B és C pontok S síkjára állított merőleges Q talppontja is megfelel, hiszen Q-hoz képest P esetében mindhárom összeg PQ^2-tel nő. Így a továbbiakban elegendő az S-beli Q pontok keresésére szorítkoznunk. (2 pont)

Legyenek rendre $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ és $\mathbf{c}$ az S sík valamely Q pontjából az A, B, illetve C pontokba mutató vektorok. Írjuk fel a feltétel első egyenlőségét a skaláris szorzat segítségével:
$(\mathbf{b}-\mathbf{a})^2+\mathbf{c}^2=(\mathbf{c}-\mathbf{b})^2+\mathbf{a}^2$. (1 pont)

A műveleteket elvégezve és rendezve $\mathbf{ab}=\mathbf{cb}$ adódik. (1 pont)

Innen $(\mathbf{a}-\mathbf{c})\mathbf{b}=0$, azaz $AC\perp QB$. (1 pont)

Így a feltétel első egyenlősége azzal ekvivalens, hogy Q az ABC háromszög B-ből induló magasságvonalán helyezkedik el. A feltétel további részéből ugyanígy kapjuk, hogy Q mindegyik magasságvonalon rajta van, azaz Q az ABC háromszög magasságpontja. A megoldás elején tett megjegyzés alapján a keresett térbeli pontok az S-re az ABC háromszög magasságpontjában állított merőleges egyenes pontjai. (2 pont)

Második megoldás: Az első megoldás elején látott meggondolás alapján most is csak az S-beli pontokra szorítkozunk. (2 pont)

Legyen Q a koordináta-rendszer kezdőpontja, és az A, B, illetve C pontok koordinátái rendre $A=(a_1,a_2)$, $B=(b_1,b_2)$, illetve $C=(c_1,c_2)$. Írjuk fel a feltétel első egyenlőségét: $(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+c_1^2+c_2^2=(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2+a_1^2+a_2^2$. (1 pont)

A műveleteket elvégezve és rendezve $a_1b_1+a_2b_2=c_1b_1+c_2b_2$ adódik. (1 pont)

Innen $(a_1-c_1)b_1+(a_2-c_2)b_2=0$, azaz $AC\perp QB$. (1 pont)

Ezután az első megoldásban látott gondolatmenettel fejezhetjük be a feladat megoldását. (2 pont)

2. feladat

Lássuk be, hogy ha p prímszám, akkor np osztója $\binom{np}{p}-n$-nek.

Megoldás:

$$\binom{np}{p}=\frac{np(np-1)\dots(np-p+1)}{p!}=\frac{n(np-1)\dots(np-p+1)}{(p-1)!}=n\binom{np-1}{p-1},$$

tehát a feladat az $np\mid n\binom{np-1}{p-1}-n$, és így a

$$(*)\qquad\qquad p\mid\binom{np-1}{p-1}-1$$

oszthatósággal ekvivalens. (3 pont)

Mivel $((p-1)!\,,p)=1$, ezért $(*)$ „jobb oldalát” $(p-1)!$-sal szorozva a továbbra is ekvivalens $p\mid(np-1)\dots(np-p+1)-(p-1)!$ oszthatósághoz jutunk. (2 pont)

Itt a különbség első tagját $\big((n-1)p+(p-1)\big)\big((n-1)p+(p-2)\big)\dots\big((n-1)p+1\big)$ alakban írva és a beszorzást elvégezve $pM+(p-1)!$ alakú kifejezés adódik. Ebből $(p-1)!$-t kivonva valóban p-vel osztható számot kapunk. (2 pont)

3. feladat

Mely k és n pozitív egészekre teljesül: $|2^k-3^n|=17$?

Megoldás: Rögtön adódik, hogy $k=1$, illetve $k=2$ nem ad megoldást, így feltehető, hogy $k\geq 3$, azaz $8\mid 2^k$. (1 pont)

A $2^k-3^n=17$ egyenletnél a 8-as maradékokat nézve a bal oldal maradéka páratlan n-re -3, páros n-re -1, a jobb oldal maradéka viszont 1, tehát ennek az egyenletnek nincs megoldása. (2 pont)

A $3^n-2^k=17$ egyenletnél hasonlóan a 8-as maradékokat vizsgálva azt kapjuk, hogy n szükségképpen páros, $n=2s$. (1 pont)

A 3-as maradékokat vizsgálva kapjuk, hogy k is páros, $k=2t$, mert páratlan k-ra a bal oldal maradéka -2, azaz 1, a jobb oldalé viszont 2. (1 pont)

Ezeket az egyenletbe beírva $17=3^{2s}-2^{2t}=(3^s-2^t)(3^s+2^t)$, azaz csak $3^s+2^t=17$, $3^s-2^t=1$ lehetséges, ahonnan $s=2$, $t=3$, vagyis $n=4$, $k=6$. (2 pont)

4. feladat

Az iskolában a kisdiák Sziszüphosz szorgalmát piros, kék és zöld pontokkal jutalmazzák. Három összegyűjtött piros pont beváltható egy kék pontra, három kék pont egy zöld pontra cserélhető be, és végül három zöld pontért ismét egy piros pont jár. Sziszüphosznak az év végén mindhárom színből 2011-2011 pontja van. Ezeket addig cserélgeti, amíg mindegyikből legfeljebb két pontja marad. Hány piros, kék és zöld pontja lehet Sziszüphosznak a cserék elvégzése után?

Első megoldás: Mivel bármely beváltásnál 2-vel csökken az összes pont száma, ezért a véghelyzetben összesen páratlan sok pontja marad Sziszüphosznak. (1 pont)

Megmutatjuk, hogy bármely kiinduló helyzet esetén, akárhogyan történik is a beváltás menete, a véghelyzetben (tehát amikor minden színből legfeljebb kettő maradt) egyértelmű az egyes színekből a pontok száma. Ehhez keresünk egy ún. invariánst, amely minden lépésben változatlan marad. Legyen p, k, z a piros, kék, illetve zöld pontok száma, és legyen alkalmas c, d konstansokkal $I = p + ck + dz$. Ha három piros pontot egy kékre cserélünk, akkor 3-mal csökken p, és 1-gyel nő k, azaz I új értéke $I' = (p-3) + c(k+1) + dz$. Így ha $c = 3$, akkor $I = I'$, tehát I értéke nem változik. Hasonlóan, ha $d = 9$, akkor három kék pontot egy zöldre cserélve sem változik I. Végül, ha három zöld pontot egy pirosra váltunk be, akkor $I' = p + 1 + 3k + 9(z-3) = I - 26$, tehát I értéke 26-tal csökken. Összefoglalva azt mondhatjuk, hogy $I = p + 3k + 9z$-nek a 26-tal való osztási maradéka az egész eljárás során azonos marad, vagyis a véghelyzetben a maradék megegyezik a kiindulási helyzetben vett maradékkal. A véghelyzetben $1 \le I_v \le 2 + 3 \cdot 2 + 9 \cdot 2 = 26$, azaz a 26-os maradék egyértelműen meghatározza I_v-t és (a 3-as számrendszerbeli felírás egyértelműsége miatt) az egyes színekből a pontok számát is. (4 pont)

Végül megmutatjuk, hogy ha kezdetben minden színből azonos számú pont van, akkor ugyanez igaz a véghelyzetre is. Tekintsünk ugyanis egy tetszőleges beváltási sorozatot. Ha ezután ebben az eljárásban a piros pontokat kékkel, a kékeket zölddel, a zöldeket pedig pirossal helyettesítjük, akkor a kiindulási helyzet szimmetriája miatt egy újabb megfelelő beváltási sorozathoz jutunk, ahol a véghelyzetben is a piros pontok helyét a kékek, a kékek helyét a zöldek, a zöldekét pedig a pirosak veszik át. A véghelyzet egyértelműsége miatt ez csak úgy lehetséges, ha a véghelyzetben is minden színből ugyanannyi pont van. A megoldás elején tett észrevétel szerint tehát Sziszüphosznak végül minden színből egy pontja maradt. (2 pont)

Második megoldás: Sziszüphosz először cserélje ki piros pontjait egy-egy 1 kg-os szikladarabra, kék pontjait egy-egy 3 kg-osra, és a zöldeket egy-egy 9 kg-osra. Ezután kezdje az átváltásokat. Világos, hogy mindegyik átváltás alkalmával a szikladarabok össztömege vagy nem változik, vagy 26 kg-mal csökken. (3 pont)

Induláskor $2011 \cdot (1+3+9) = 13 \cdot 2011$ kilogrammnyi sziklája volt. A $13 \cdot 2011$ szám 26-os osztási maradéka 13, ezért az átváltások befejeztével, amikor legfeljebb $2 \cdot (1+3+9) = 26$ kg sziklája maradt, pontosan 13 kg kellett, hogy maradjon. (2 pont)

Ezt az össztömeget az 1, 3, illetve 9 kg-os szikladarabokból csak úgy lehet előállítani, hogy mindegyikből egyet választunk. Tehát Sziszüphosznak a cserék elvégzése után 1-1 pontja maradt mindhárom színből. (2 pont)

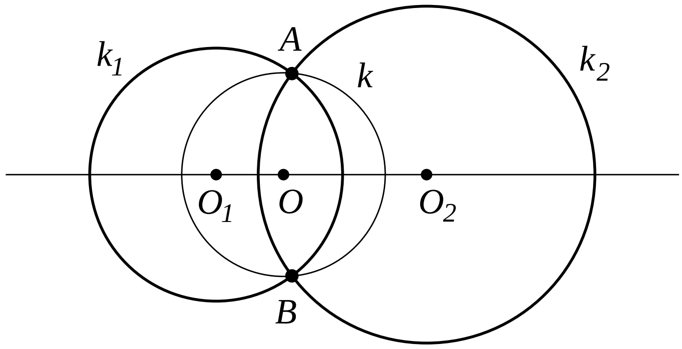
5. feladat

Adott egy 2011 csúcsú konvex sokszög úgy, hogy semelyik négy csúcs sem esik egy körre. A csúcsokból kiválasztható ponthármasokra megrajzoljuk a rájuk illeszkedő kört. Egy ilyen kör sovány, ha a sokszögnek van olyan csúcsa, amely kívül van a körön, ellenkező esetben a kör kövér. Sovány vagy kövér körből van több?

Megoldás: Alább megmutatjuk, hogy akárhogyan választjuk is ki a sokszög két tetszőleges csúcsát, a kövér körök közül legfeljebb kettő illeszkedhet mindkét kiválasztott csúcsra.

Emiatt a kövér körök száma legfeljebb $2 \cdot \binom{2011}{2} = 2011 \cdot 2010$ lehet. Ez a szám jóval kisebb, mint a ponthármasok számának, $\binom{2011}{3} = 2011 \cdot 2010 \cdot 2009/6$-nak a fele, ezért sovány körből több van, mint kövérből. (2 pont)

Legyen tehát A és B a sokszög két csúcsa. Tekintsük a sokszög síkjában az A-ra és B-re illeszkedő körök seregét. Ezeknek a köröknek a középpontjai az AB szakasz felező merőleges egyenesét söprik végig. Az A-t és B-t tartalmazó csúcshármasokra illesztett körök középpontjai egy 2009 elemű pontsorozatot alkotnak ezen az egyenesen. (2 pont)



Tegyük föl, hogy közülük kettő, O_1 és O_2 egy-egy kövér kör (k_1, illetve k_2) középpontja. Állítjuk, hogy az O_1 és O_2 közti szakaszon nem lehet a középpontok sorozatának további tagja. Indirekt módon tegyük fel, hogy mégis létezik ilyen O pont, és jelöljük k-val a hozzá tartozó kört. Miután az O középpont O_1 és O_2 között van, a k_1 és k_2 határolta körlemezek közös részét a k kör tartalmazza, mégpedig A-tól és B-től eltekintve a belsejében. Ezért a k kör pontjai közül csak A-t és B-t fedheti le k_1 és k_2 egyszerre. Akárhol van is tehát a k körön a sokszög harmadik (azaz A-tól és B-től különböző) csúcsa, azt vagy k_1, vagy k_2 nem tartalmazza. Ez pedig ellentmond annak, hogy k_1 is és k_2 is kövér. (2 pont)

Bármely két A-ra és B-re illeszkedő kövér kör középpontja tehát szomszédos a középpontok sorozatában, és ezért nem lehet belőlük kettőnél több. (1 pont)

Megjegyzések: 1. A megoldás módszerének továbbgondolásával a kövér körök számát pontosan meg lehet határozni. A sokszög bármelyik szomszédos csúcspárjára pontosan egy kövér kör illeszkedik, a nem szomszédos csúcspárokra pedig vagy egy sem, vagy kettő. Emiatt a kövér körökhöz tartozó csúcsháromszögek átfedés nélkül kiparkettázzák a sokszöget. Ha a sokszög n oldalú, akkor egy ilyen parkettázáshoz (azaz háromszögekre daraboláshoz egymást nem metsző átlókkal) pontosan $n - 2$ háromszög szükséges, ennyi tehát a kövér körök száma. Ez bármely $n \geq 5$ esetén kisebb a lehetséges csúcshármasok számának a felénél, $\frac{1}{2}\binom{n}{3}$-nál.

2. Észrevehetjük, hogy a megoldás nem használta ki azt a feltevést, hogy egy konvex sokszög csúcsairól van szó. Valóban, ha ehelyett csak annyit teszünk föl a pontok rendszeréről, hogy semelyik három nem kollineáris, akkor is ugyanezt az eredményt kapjuk. Könnyen látható, hogy olyan pontra, amely a pontrendszer konvex burkának belső pontja, csak sovány kör illeszkedhet. Emiatt az előző megjegyzést fölhasználva a kövér körök száma $m-2$, ahol m a konvex burok csúcsainak száma.