Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2011–2012-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

A döntő feladatai

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

1. Legyen $n \geq 3$. Az n tagot számláló Hazugok Klubjában mindenkit megkérdezünk, hány olyan tagja van a klubnak (saját magán kívül), aki vele azonos évben született. A klubtagok mind hamis adatokat akarnak közölni úgy, hogy valamilyen sorrendben a $0, 1, \ldots, n-1$ válaszokat adják meg. A tényleges születési évszámokról mi csak annyit tudunk, hogy nem mind különbözők, de nem is mind azonosak. Milyen n értékekre lehetünk biztosak abban, hogy a klubtagok el tudják érni a céljukat?

2. Legyen B az AC szakasz belső pontja. Rajzoljuk meg a k_1 és a k_2 félkört az AB, illetve az AC szakaszra mint átmérőre ugyanabban a félsíkban. A BC szakaszra mint alapra állítsunk olyan BCD egyenlő szárú háromszöget, amelynek a D csúcsa k_2-re illeszkedik. Legyen K annak a körnek a középpontja, amely érinti k_1-et, k_2-t és a BD szakaszt. Igazoljuk, hogy KB merőleges AC-re.

3. Legyen $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ a pozitív prímszámok sorozata és

$$f(k,n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor n\sqrt{p_k/p_j} \right\rfloor .$$

Bizonyítsuk be, hogy bármely $M > 0$ egészhez pontosan egy olyan (k,n) pozitív egész számpár létezik, amelyre $f(k,n) = M$.

$\big($A képletben $\lfloor x \rfloor$ az x szám alsó egészrészét, $\sum$ pedig a megadott indexekre történő összegzést jelenti, tehát pl. $f(2,1) = \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/2} \rfloor +$ $+ \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/3} \rfloor = 2$ (az összeg többi tagja 0).$\big)$