Oktatási Hivatal

Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny, 2011–2012-es tanév

MATEMATIKA, III. kategória

a gimnáziumok speciális matematikai osztályainak tanulói részére

A döntő feladatainak megoldásai

1. feladat.

Legyen $n \geq 3$. Az n tagot számláló Hazugok Klubjában mindenkit megkérdezünk, hány olyan tagja van a klubnak (saját magán kívül), aki vele azonos évben született. A klubtagok mind hamis adatokat akarnak közölni úgy, hogy valamilyen sorrendben a $0, 1, \ldots, n-1$ válaszokat adják meg. A tényleges születési évszámokról mi csak annyit tudunk, hogy nem mind különbözők, de nem is mind azonosak. Milyen n értékekre lehetünk biztosak abban, hogy a klubtagok el tudják érni a céljukat?

Megoldás: Legyen n összetett szám, $n = rs$, ahol $r > 1$, $s > 1$. Ekkor előfordulhat, hogy r különböző évben születtek, és minden ilyen évben s klubtag született. Ilyen esetben mindenkinél $s-1$ lenne a kérdésre az igaz válasz, amit valakinek mondania kell, vagyis ekkor nem tudnak mind hamis adatokat közölni.

Ha viszont n prím, akkor biztosan el tudják érni a céljukat. Először belátjuk, nem fordulhat elő, hogy minden klubtagnál ugyanaz a t szám lenne a helyes válasz. Ekkor ugyanis a klubtagok valahány $t+1$-es csoportot alkotnának, ahol egy-egy csoporton belül vannak az azonos évben születettek. Ha az ilyen csoportok száma m, akkor $n = (t+1)m$, azaz n prím volta miatt $t+1 = 1$ vagy $t+1 = n$. Az első feltétel azonban azt jelenti, hogy minden születési évszám különböző, a második pedig azt, hogy mindegyik azonos, ezeket a lehetőségeket viszont kizártuk.

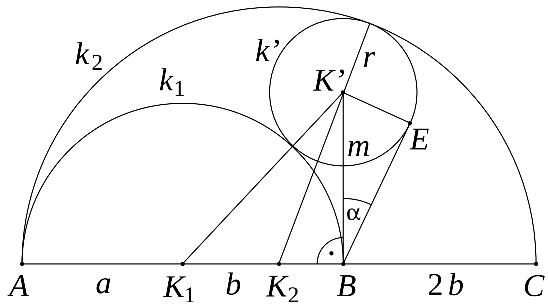
Legyen $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_k \leq n-1$ a kérdésre a klubtagok által adható összes igaz válasz, és legyen H_i azon klubtagok halmaza, akiknél az igaz válasz éppen t_i lenne ($i = 1, 2, \ldots, k$). Megmutattuk, hogy $k > 1$. Azt kell biztosítani, hogy H_i tagjai ne t_i-t válaszoljanak. Ennek érdekében H_1 egy kiszemelt tagja mondjon t_2-t, H_2 egy kiszemelt tagja mondjon t_3-at stb., és végül H_k egy kiszemelt tagja mondjon t_1-et. A többiek pedig a fennmaradó $n-k$ darab 0 és $n-1$ közti számot maguk közt tetszőlegesen szétosztva válaszolhatnak.

2. feladat

Legyen B az AC szakasz belső pontja. Rajzoljuk meg a k_1 és a k_2 félkört az AB, illetve az AC szakaszra mint átmérőre ugyanabban a félsíkban. A BC szakaszra mint alapra állítsunk olyan BCD egyenlő szárú háromszöget, amelynek a D csúcsa k_2-re illeszkedik. Legyen K annak a körnek a középpontja, amely érinti k_1-et, k_2-t és a BD szakaszt. Igazoljuk, hogy KB merőleges AC-re.

Megoldás: Jelölje k a szóban forgó kört. Tekintsük ehelyett azt a k' kört, amely érinti k_1-et és k_2-t, és amelynek K' középpontja az AC-re B-ben állított merőlegesen van. Azt akarjuk majd belátni, hogy $k' = k$ és $K' = K$.

Először meghatározzuk a k' kör r sugarát. Legyen $m = BK'$. Az AB szakasz hosszát jelöljük $2a$-val, BC hosszát $2b$-vel. Ekkor k_1 sugara a, k_2-é $a+b$, továbbá a K_1 és K_2 középpontokra $K_1K_2 = b$, $K_2B = |a-b|$, $K_1K' = a+r$, $K_2K' = a+b-r$ érvényes.



A K_1BK' és K_2BK' derékszögű háromszögekre a Pitagorasz-tételből

$$m^2 = (a+r)^2 - a^2 = 2ar + r^2,$$

illetve

$$m^2 = (a+b-r)^2 - |a-b|^2 = r^2 - 2ar - 2br + 4ab\,.$$

Innen

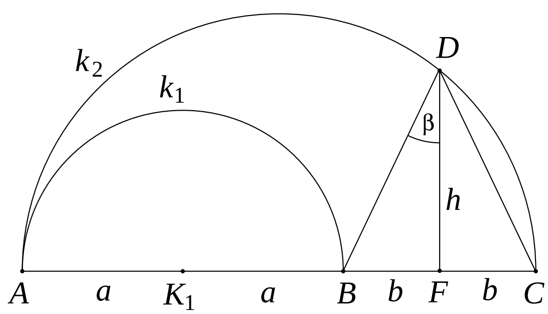
$$2ar + r^2 = r^2 - 2ar - 2br + 4ab,$$

$$r = \frac{2ab}{2a+b}\,.$$

Húzzunk ezután érintőt a B pontból a k' körhöz, jelölje BE azt az érintőszakaszt, amely a BK' egyenesnek a k_1-et nem tartalmazó félsíkjában van. A BEK' derékszögű háromszögből meghatározzuk $\alpha = EBK'\sphericalangle$ tangensének négyzetét:

$$\mathrm{tg}^2\alpha = \frac{r^2}{m^2 - r^2} = \frac{r^2}{2ar} = \frac{r}{2a} = \frac{b}{2a+b}\,.$$

Tekintsük a BCD egyenlő szárú háromszög $h = DF$ magasságát, illetve a szárak és a magasság közti $\beta = BDF\sphericalangle$ szöget.



Az ACD derékszögű háromszögben a magasságtétel alapján

$$h^2 = (2a+b)\cdot b,$$

ahonnan

$$\mathrm{tg}^2\beta = \frac{b^2}{h^2} = \frac{b}{2a+b}\,.$$

Így $\alpha = \beta$. Miután a BK' és DF szögszárak párhuzamosak, az $EBK'\sphericalangle$ és $BDF\sphericalangle$ szögeknek váltószögeknek kell lenniük, ezért E illeszkedik BD-re. A k' kör tehát érinti a BD szakaszt is, azaz $k' = k$ és $K' = K$, amivel az állítást beláttuk.

3. feladat

Legyen $2 = p_1 < p_2 < \ldots$ a pozitív prímszámok sorozata és $f(k,n) = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor n\sqrt{p_k/p_j} \right\rfloor$. Bizonyítsuk be, hogy bármely $M > 0$ egészhez pontosan egy olyan (k,n) pozitív egész számpár létezik, amelyre $f(k,n) = M$.

$\big($A képletben $\lfloor x \rfloor$ az x szám alsó egészrészét, $\sum$ pedig a megadott indexekre történő összegzést jelenti, tehát pl. $f(2,1) = \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/2} \rfloor + \lfloor 1 \cdot \sqrt{3/3} \rfloor = 2$ (az összeg többi tagja 0).$\big)$

Megoldás: Tekintsük az összes t^2q alakú számot, ahol $t > 0$ egész és $q > 0$ prímszám, és rendezzük ezeket növekvő sorrendben egy $a_1 < a_2 < \ldots < a_k < \ldots$ végtelen sorozatba ($a_1 = 1^2 \cdot 2 = 2$, $a_2 = 1^2 \cdot 3 = 3$, $a_3 = 1^2 \cdot 5 = 5$, $a_4 = 1^2 \cdot 7 = 7$, $a_5 = 2^2 \cdot 2 = 8$ stb.). Az a_i-ben szereplő (egyértelműen meghatározott) négyzetszámot, illetve prímszámot jelölje t_i^2, illetve q_i, azaz $a_i = t_i^2 q_i$. (Természetesen egy adott négyzetszám, illetve prímszám végtelen sokszor lesz t_i^2, illetve q_j.)

Legyen $S_i = \sum_{j=1}^{\infty} \left\lfloor \sqrt{t_i^2 q_i / p_j} \right\rfloor$. Ezzel a feladatban szereplő összes $f(k,n)$ összeget felírtuk (kicsit más jelöléssel), és azt kell belátni, hogy S_i minden pozitív egész értéket pontosan egyszer vesz fel. Azt fogjuk megmutatni teljes indukcióval, hogy $S_i = i$.

Nyilván $S_1 = f(1,1) = 1$. Ezután elég azt igazolni, hogy $S_{i+1} = 1 + S_i$. Ehhez hasonlítsuk össze az S_i, illetve S_{i+1} definíciójában szereplő azonos j indexű tagokat: $b_j = \left\lfloor \sqrt{t_i^2 q_i / p_j} \right\rfloor$, illetve $c_j = \left\lfloor \sqrt{t_{i+1}^2 q_{i+1} / p_j} \right\rfloor$. Mivel a számlálóban a_i, illetve a_{i+1} szerepel, és $a_i < a_{i+1}$, ezért nyilván $b_j \le c_j$. Vizsgáljuk meg, mikor fordul elő, hogy $b_j < c_j$. Ez pontosan akkor teljesül, ha van olyan $d > 0$ egész szám, amelyre

$$\frac{t_i^2 q_i}{p_j} < d^2 \le \frac{t_{i+1}^2 q_{i+1}}{p_j}\,, \tag{1}$$

azaz

$$a_i = t_i^2 q_i < d^2 p_j \le t_{i+1}^2 q_{i+1} = a_{i+1}\,.$$

Az a_i sorozat definíciója alapján ez azt jelenti, hogy $d^2 p_j = t_{i+1}^2 q_{i+1} = a_{i+1}$, vagyis $d = t_{i+1}$ és $p_j = q_{i+1}$. Így pontosan egy olyan j lesz, amelyre $b_j < c_j$, és ekkor $c_j = 1 + b_j$, hiszen (1) ekkor is csak egyetlen d-vel teljesül. Az összes többi j-re pedig $b_j = c_j$, vagyis valóban $S_{i+1} = 1 + S_i$.