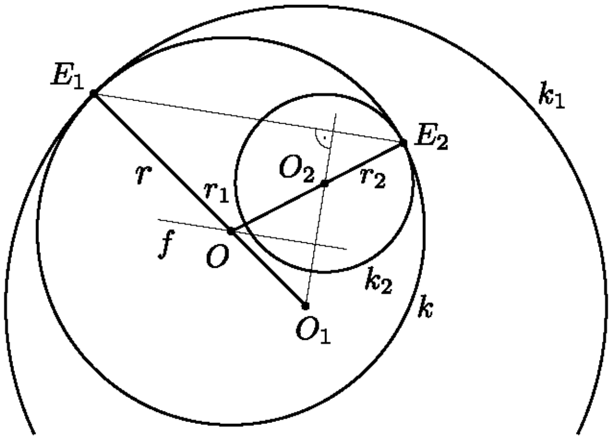
Oktatási Hivatal

OKTV MATEMATIKA, III. KATEGÓRIA

2012-13-AS TANÉV, DÖNTŐ

1. Adott a síkon három különböző kör, k, k_1 és k_2. Középpontjaik és sugaraik legyenek rendre O, O_1, O_2, r, r_1 és r_2. Tegyük fel, hogy k belülről érinti k_1-et az E_1 pontban, k_2 belülről érinti k-t az $E_2 \neq E_1$ pontban, továbbá hogy az O_1O_2 egyenes merőleges az E_1E_2 egyenesre. Fejezzük ki az r sugarat r_1-gyel és r_2-vel.



Megoldás. Legyen f az E_1E_2-vel párhuzamos egyenes az O ponton át. Miután az E_1E_2O háromszög egyenlő szárú, f felezi az O-nál levő külső szöget. Az érintkezésről szóló feltevések miatt O_1 az E_1O oldal O-n túli meghosszabbítására esik, O_2 pedig az E_2O oldal belső pontja. Ezért f az O_1O_2O háromszög belső szögfelezője az O csúcsnál. A merőlegességi feltevés miatt f egyúttal magasságvonal is az O_1O_2O háromszögben. Ezért a háromszög egyenlő szárú, $O_1O = O_2O$, azaz $r_1 - r = r - r_2$. Tehát $r = (r_1 + r_2)/2$. □

2. Mutassuk meg, hogy

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)k}{m^{k+1}} = 1\,.$$

Első megoldás. Jelölje H azoknak az m hosszú sorozatoknak a halmazát, amelyek elemei az $1, 2, \dots, m$ számok közül kerülnek ki. E sorozatok száma m^m. Megszámoljuk H elemeit másféleképpen is.

Jelölje $H_k \subseteq H$ azoknak az $(a_1, \dots, a_m) \in H$ sorozatoknak a halmazát, amelyekben a legelső ismétlődés a $(k+1)$-edik helyen jelentkezik. Másképp fogalmazva: $a_1, a_2, \dots, a_k$ páronként különböző, de a_{k+1} megegyezik az első k tag valamelyikével. Ez értelmes akkor, ha $k = 1, 2, \dots, m-1$, ha pedig $k = m$, akkor H_m álljon azokból a sorozatokból, amelyekben nincs ismétlődés, azaz minden tagjuk különböző. A H_k halmazok nyilván páronként diszjunktak, és uniójuk H.

Belátjuk, hogy H_k elemszáma $m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)km^{m-k-1}$. Valóban, az a_1 számot m-féleképpen választhatjuk, majd az a_2-t $(m-1)$-féleképpen, és így tovább, az

a_k számot $(m-k+1)$-féleképpen. Ezután a_{k+1}-ről azt kell megmondani, hogy az első k tag közül melyikkel egyezzen meg. Ez k-féleképpen lehetséges (ha $k+1 \le m$). A fennmaradó $m-k-1$ tag mindegyike tetszőleges, vagyis m-féle lehet. A képlet akkor is helyes eredményt ad, amikor $m = k$, mert H_m-nek nyilvánvalóan $m!$ eleme van.

Az előzőek alapján

$$m^m = \sum_{k=1}^{m} m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)km^{m-k-1}\,.$$

Ha mindkét oldalt m^m-nel elosztjuk, akkor a jobb oldalon a feladatbeli összeget kapjuk. $\square$

Az előző megoldást a következőképpen is interpretálhatjuk. Jelölje p_k annak a valószínűségét, hogy egy sorozatban az első ismétlődés a $(k+1)$-edik helyen történik (p_m annak a valószínűsége, hogy egyáltalán nincs ismétlődés). Ekkor a p_k valószínűségek összege 1, másrészt p_k értéke H_k elemszáma osztva m^m-nel, ami a feladatbeli összeg k-adik tagja.

A valószínűségszámítási megközelítést a következő játék is illusztrálja. Egy zsákban van 1 darab piros és $m-1$ darab fehér golyó. A játék során egyszerre mindig egy golyót húzunk (a golyók tapintásra megkülönböztethetetlenek, a húzások függetlenek).

(1) Ha a kihúzott golyó piros, befejezzük a játékot.

(2) Ha fehér, akkor eldobjuk, beteszünk helyette a zsákba egy pirosat, és folytatjuk.

Nyilván 1 a valószínűsége annak, hogy legkésőbb az m-edik lépésben pirosat húzunk, hiszen a fehér golyók ekkorra elfogynak. Másrészt annak a valószínűsége, hogy a játék pontosan a k-adik lépésben fejeződik be, éppen a feladatban szereplő összeg k-adik tagja.

Második megoldás. Jelölje s_k a feladatban szereplő összeg k-adik tagját, és legyen

$$t_k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)}{m^k}$$

ha $1 \le k \le m+1$ (azaz $t_1 = 1$ és $t_{m+1} = 0$). Az s_k számlálójában a $k = m-(m-k)$ átalakítást az utolsó tényezőre végrehajtva azt kapjuk, hogy

$$s_k = \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)m}{m^{k+1}} - \frac{m(m-1)(m-2)\dots(m-k+1)(m-k)}{m^{k+1}}\,,$$

ami éppen $t_k - t_{k+1}$. Ezzel a feladatbeli összeget „teleszkopikussá” alakítottuk, értéke

$$(t_1 - t_2) + (t_2 - t_3) + \dots + (t_m - t_{m+1}) = t_1 - t_{m+1}\,.$$

Mivel $t_1 = 1$ és $t_{m+1} = 0$, ezért a végeredmény 1. $\square$

3. Tekintsük azokat az n hosszúságú sorozatokat, amelyek mindegyik eleme 0 vagy 1. Két ilyen sorozat összegén a tagonként modulo 2 végzett összeadás eredményét értjük. Mely pozitív egész n számokra állíthatók párba ezek a sorozatok úgy, hogy a párok két tagját rendre összeadva 2^{n-1} különböző sorozatot kapjunk?

Megoldás. Az 1 hosszú sorozatok esetében a $0 \longleftrightarrow 1$ párosítás nyilván megfelelő. Ha $n = 2$, akkor a három lehetséges párba állítás egyike sem lesz jó, mert a négy lehetséges sorozat összege az azonosan 0 sorozat, így bármelyik párosítás esetén a párok összege azonos. Most két konstrukciót adunk annak megmutatására, hogy $n \ge 3$ esetén létezik megfelelő párosítás.

Az **első megoldás** párosítása a következő képlettel adható meg:

$$v = (a_1, a_2, a_3, a_4, \dots, a_{n-1}, 0) \longleftrightarrow v' = (a_{n-1}, a_1 + a_{n-1}, a_2, a_3, \dots, a_{n-2}, 1)$$

(ahol a $+$ jel modulo 2 összeadást jelöl). Mivel a 0-ra és 1-re végződő sorozatok száma egyenlő, annak igazolásához, hogy párosítást kaptunk, elegendő belátni, hogy $v \neq w$ esetén $v' \neq w'$. Ezt úgy mutatjuk meg, hogy v' tagjaiból rekonstruáljuk v tagjait. Az nyilvánvaló, hogy $a_{n-1}, a_2, a_3, \ldots, a_{n-2}$ rekonstruálható. Ha v' első két tagját összeadjuk, akkor megkapjuk a_1-et is.

Ennél a párosításnál $v + v' = (a_1 + a_{n-1}, a_2 + a_1 + a_{n-1}, a_3 + a_2, a_4 + a_3, \ldots, a_{n-1} + a_{n-2}, 1)$. Ismét elegendő megmutatni, hogy a kapott sorozatból v rekonstruálható. Az első két tag összege a_2. Ekkor a harmadik tagból megkapható a_3, a negyedikből a_4, és így tovább, az $(n-1)$-edikből a_{n-1}. Ennek ismeretében az első tag megadja a_1-et is.

A **második megoldás** párosítását rekurzióval adjuk meg. Ha $n = 3$, illetve ha $n = 4$, akkor egy-egy lehetséges párosítás a következő.

v_1	v_2	$v_1 + v_2$
(0,0,0)	(1,1,1)	(1,1,1)
(0,0,1)	(0,1,0)	(0,1,1)
(1,1,0)	(0,1,1)	(1,0,1)
(1,0,1)	(1,0,0)	(0,0,1)

v_1	v_2	$v_1 + v_2$
(0,0,0,0)	(1,1,1,1)	(1,1,1,1)
(1,1,0,0)	(0,0,1,0)	(1,1,1,0)
(1,0,1,0)	(0,0,0,1)	(1,0,1,1)
(1,0,0,1)	(0,1,0,0)	(1,1,0,1)
(0,1,0,1)	(1,1,0,1)	(1,0,0,0)
(1,0,0,0)	(1,1,1,0)	(0,1,1,0)
(0,1,1,1)	(1,0,1,1)	(1,1,0,0)
(0,1,1,0)	(0,0,1,1)	(0,1,0,1)

Legyen $n \geq 5$, és rögzítsük az $n-2$ hosszú sorozatok egy megfelelő párosítását, melyben a v sorozat párját jelölje v'. Minden ilyen (v, v') párban rögzítsük v és v' sorrendjét, és képezzük a $(0,0,v)$, $(0,1,v)$, $(1,0,v)$, $(1,1,v)$, illetve a $(0,0,v')$, $(0,1,v')$, $(1,0,v')$, $(1,1,v')$ sorozatokat. Így minden n hosszú sorozatot pontosan egyszer kapunk meg, mert az első két koordináta is és az utolsó $n-2$ koordináta is egymástól függetlenül tetszőleges lehet.

Így az n hosszú sorozatokat nyolcelemű, diszjunkt csoportokba osztottuk. Egy-egy ilyen csoporton belül a párosítást a következőképpen adjuk meg:

v_1	v_2	$v_1 + v_2$
$(0,0,v)$	$(1,1,v')$	$(1,1,v+v')$
$(1,1,v)$	$(1,0,v')$	$(0,1,v+v')$
$(1,0,v)$	$(0,0,v')$	$(1,0,v+v')$
$(0,1,v)$	$(0,1,v')$	$(0,0,v+v')$

Egy csoporton belül a négy összegsorozat páronként különböző, hiszen az első két tagjuk megkülönbözteti őket. A különböző csoportokból származó összegsorozatok pedig indukciós feltevésünk alapján utolsó $n-2$ tagjuk közül legalább egyben különböznek. $\square$

Megjegyzések.

(1) Megoldatlan az a probléma, hogy ha az n hosszú 0–1-sorozatokat tetszőlegesen párba állítjuk, akkor mik lehetnek a keletkező összegsorozatok (amelyek között ismétlődéseket is megengedünk). Nyilvánvaló szükséges feltétel $n \geq 2$ esetén, hogy ezek összege az azonosan nulla sorozat legyen.

(2) Ez a megjegyzés azoknak szól, akiknek vannak a középiskolai anyagon túlmenő algebrai ismereteik. Legyen W a $\mathbb{Z}_2$ test feletti $n-1$ magas oszlopvektorok halmaza. Ekkor a feladatban szereplő sorozatokat írhatjuk $(v, 0)$, illetve $(v, 1)$ alakban, ahol v az első $n-1$ tagból képzett eleme W-nek. Tekintsük a

$$(v, 0) \longleftrightarrow (Mv, 1)$$

megfeleltetést, ahol M egy $(n-1) \times (n-1)$-es $\mathbb{Z}_2$ feletti mátrix. Az első megoldásban megadott párosítás is ebbe a típusba tartozik. Ez a megfeleltetés akkor elégíti ki a feladat feltételeit, ha M és $M + E$ invertálható $\mathbb{Z}_2$ fölött, azaz determinánsuk nem nulla. Ilyen mátrixokat lineáris algebrai ismeretek birtokában könnyű konstruálni, például megfelelnek azok, amelyek karakterisztikus polinomjának nem gyöke sem a 0, sem az 1. A megoldásban szereplő mátrix karakterisztikus polinomja $x^n + x + 1$.

Hasonló, de még rövidebb megoldás a következő. Ismeretes, hogy W elemei egy T testet alkotnak (egy alkalmas szorzásműveletre). Ha $n \geq 3$, akkor van olyan g, ami T-nek nem a nulleleme és nem az egységeleme, hiszen T elemszáma ekkor nagyobb, mint 2. Ezért a $(v, 0) \longleftrightarrow (gv, 1)$ megfeleltetés kielégíti a feltételeket.