



A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. A P pont végigfut egy kör félkörnél rövidebb AB ívén. Legyen P' a P -vel átellenes pont a körön. Bizonyítsuk be, hogy $AP' \cdot BP' - AP \cdot BP$ állandó.
2. Hány N pozitív egészre teljesül, hogy $N/5$ egy egész szám hetedik, $N/7$ pedig egy egész szám ötödik hatványa?
3. Legyen P az ABC szabályos háromszög belső pontja, továbbá A_1 , B_1 és C_1 a P pont merőleges vetülete rendre a BC , CA , illetve AB oldalon. Bizonyítsuk be, hogy

$$AC_1 \cdot BA_1 + BA_1 \cdot CB_1 + CB_1 \cdot AC_1 = C_1B \cdot A_1C + A_1C \cdot B_1A + B_1A \cdot C_1B.$$

4. Adott n ember között hányféle olyan ismeretségi kapcsolatrendszer lehet, hogy mindenki páratlan sok másikat ismer (az ismeretség kölcsönös)?
5. Legyenek $a_1 \leq a_2 \leq \dots \leq a_n \leq b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ valós számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_n + b_1 + b_2 + \dots + b_n)^2 \geq 4n(a_1b_1 + a_2b_2 + \dots + a_nb_n).$$

Valamennyi feladat 7 pontot ér.