Oktatási Hivatal

A 2013/2014. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Megoldások

1. feladat

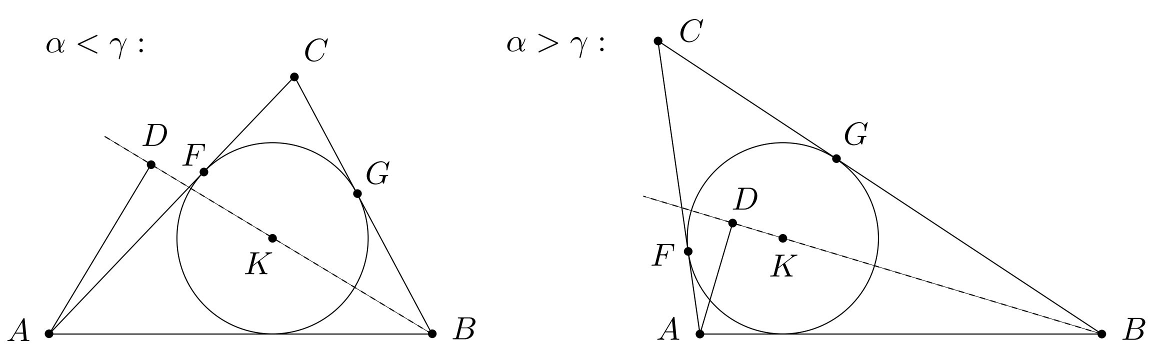
Adott az ABC háromszög. Bocsássunk merőlegest A-ból a B-beli belső szögfelező egyenesre, és B-ből az A-beli belső szögfelező egyenesre. A talppontokat jelölje D, illetve E. Bizonyítsuk be, hogy a DE egyenes a háromszög AC és BC oldalát a beírt kör érintési pontjaiban metszi.

Megoldás: Jelöljük K-val a beírt kör középpontját, F-fel és G-vel a szóban forgó érintési pontokat, azaz K merőleges vetületeit az AC, illetve BC oldalon. A háromszög szögeit a szokásos módon α, β és γ jelöli.

Megmutatjuk, hogy a D pont az FG egyenesre illeszkedik. A pontok szerepcseréjével ezután ugyanúgy igazolható, hogy E is illeszkedik az FG egyenesre, ezek együtt pedig a bizonyítandó állítást vonják maguk után.

A D, F, G pontok kollinearitásának igazolása céljából először vegyük észre, hogy merőleges szárú hegyesszögek lévén $KFG\sphericalangle = FCK\sphericalangle = \gamma/2$. Az ABK háromszög szögösszegét használva látható továbbá, hogy az A-ból és B-ből induló szögfelezők $(\alpha+\beta)/2$ szögben metszik egymást a K pontban.

Ha $\alpha = \gamma$, akkor BF a háromszög szimmetriatengelye és $D = F$, ezért ilyenkor nincs mit bizonyítani. A továbbiakban két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy $\alpha < \gamma$, illetve $\alpha > \gamma$. Az $\alpha < \gamma$ esetben a D pont a háromszögön kívülre, az $\alpha > \gamma$ esetben a belsejébe esik.



Mindkét esetben $ADK\sphericalangle = AFK\sphericalangle = \pi/2$, ezért az A, K, D, F pontok egy húrnégyszög csúcsai. Ha $\alpha < \gamma$, akkor D és K, ha pedig $\alpha > \gamma$, akkor F és K szemközti csúcsok ebben a húrnégyszögben. Meghatározzuk a KFD szöget.

Ha $\alpha < \gamma$, akkor $KFD\sphericalangle = \pi - KAD\sphericalangle = \pi/2 + (\alpha+\beta)/2 = \pi - \gamma/2 = \pi - KFG\sphericalangle$,
ha pedig $\alpha > \gamma$, akkor $KFD\sphericalangle = KAD\sphericalangle = \pi/2 - (\alpha+\beta)/2 = \gamma/2 = KFG\sphericalangle$.
Mindkét esetben tehát D, F és G kollineáris pontok.

2. feladat

A p és q pozitív számokra $p + q \leq 1$. Igazoljuk, hogy bármely m, n pozitív egészekre $(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1$.

Első megoldás: Egy m sorból és n oszlopból álló táblázat minden egyes elemét egymástól függetlenül p valószínűséggel pirosra, q valószínűséggel kékre és $1-p-q$ valószínűséggel zöldre festjük. Ekkor $1-p^m$ annak a valószínűsége, hogy egy adott oszlop nem teljesen piros, $(1-p^m)^n$ azé, hogy egyik oszlop sem teljesen piros, tehát $1-(1-p^m)^n$ annak a valószínűsége, hogy van csupa piros elemből álló oszlop. Hasonlóan, $1-(1-q^n)^m$ annak a valószínűsége, hogy van csupa kék elemből álló sor. Mivel ezek egymást kizáró események, ezért a két valószínűség összege legfeljebb 1, azaz $[1-(1-p^m)^n] + [1-(1-q^n)^m] \leq 1$, ami átrendezve éppen a feladat állítása.

Második megoldás: Ha $p + q < 1$, akkor növeljük pl. q értékét addig, amíg $p + q = 1$-et el nem érjük. Ekkor a bizonyítandó egyenlőtlenség bal oldala csökkent. Ennek alapján elegendő az egyenlőtlenséget a $p + q = 1$ esetre igazolni.

Teljes indukcióval bizonyítunk. Ha $m = n = 1$, akkor a $p+q \leq 1$ (igaz) összefüggés adódik. Most tegyük fel, hogy az egyenlőtlenség teljesül valamely m, n értékpárra, és vezessük le ebből, hogy $m, n+1$ és $m+1, n$ esetén is fennáll. Mivel m és n szerepe szimmetrikus, ezért elég az elsőt belátnunk.

Az indukciós feltevés szerinti $(1-p^m)^n + (1-q^n)^m \geq 1$ egyenlőtlenséget $(1-p^m)$-mel szorozva és mindkét oldalhoz p^m-t hozzáadva $(1-p^m)^{n+1} + (1-q^n)^m - ((1-q^n)p)^m + p^m \geq 1$ adódik. Mivel a bizonyítandó egyenlőtlenség $(1-p^m)^{n+1} + (1-q^{n+1})^m \geq 1$, ezért elég belátni, hogy $(1-q^{n+1})^m \geq (1-q^n)^m - \big((1-q^n)p\big)^m + p^m$, azaz $(1-q^{n+1})^m + \big((1-q^n)p\big)^m \geq$ $\geq (1-q^n)^m + p^m$.

Ez utóbbi egy $a^m + d^m \geq b^m + c^m$ típusú egyenlőtlenség, ahol $a + d = b + c$ és $a > b >$ $> c > d > 0$, hiszen $(1-q^{n+1}) + (1-q^n)(1-q) = (1-q^n) + (1-q)$ és $1-q^{n+1} > 1-q^n >$ $> 1-q > (1-q^n)(1-q)$. Az $a+d = b+c = 2H$ jelöléssel $a = H+x$, $b = H+y$, $c = H-y$, $d = H-x$, ahol $x > y > 0$, így valóban

$$\begin{aligned}
a^m + d^m &= (H+x)^m + (H-x)^m = \\
&= 2\left(H^m + \binom{m}{2}H^{m-2}x^2 + \binom{m}{4}H^{m-4}x^4 + \dots\right) > \\
&> 2\left(H^m + \binom{m}{2}H^{m-2}y^2 + \binom{m}{4}H^{m-4}y^4 + \dots\right) = \\
&= (H+y)^m + (H-y)^m = b^m + c^m.
\end{aligned}$$

(Az utolsó lépést az $f(z) = z^m + (H-z)^m$ függvény deriváltjának vizsgálatával is el lehet végezni.)

3. feladat

Az $1, 2, \ldots, 2014^{2014}$ számok közül Aladár és Boglárka felváltva törölnek le egy számot (Aladár kezd), amíg csak két szám marad. Ha a megmaradó két szám összege négyzetszám, akkor Boglárka nyer, egyébként Aladár. Kinek van nyerő stratégiája?

Megoldás: Belátjuk, hogy jó játék esetén Boglárka nyer, éspedig általánosabban 2014^{2014} helyett minden 8-cal osztható n esetén ő nyer.

A stratégia lényege, hogy Boglárka az $1, 2, \ldots, n$ számokat olyan párokba osztja, hogy bármely párban az elemek összege négyzetszám legyen, és ha Aladár a pár egyik elemét törli, akkor Boglárka válasza a pár másik elemének a törlése. Ily módon a végén megmaradó két szám éppen egy párt alkot, tehát az összegük négyzetszám, és így Boglárka nyert.

A párosítás megvalósíthatóságát n szerinti teljes indukcióval igazoljuk. Ha $n = 8$, akkor az $(x, 9 - x)$ párok megfelelnek $(1 \leq x \leq 4)$.

Tegyük most fel, hogy n osztható 8-cal, $n \geq 16$, és a 8-nak minden, n-nél kisebb többszöröse esetén létezik a kívánt párosítás. Legyen s^2 az n-nél nagyobb páratlan négyzetszámok közül a legkisebb, és (az alább belátandó $s^2 - n < n$ feltételt megelőlegezve) az $s^2 - n \leq x \leq n$ számok között képezzük az $(x, s^2 - x)$ párosítást. Ha $s^2 = n+1$, akkor készen vagyunk. Ha $s^2 > n+1$, akkor az indukció alkalmazható a kimaradó $1, 2, \ldots, s^2-n-1$ számokra feltéve, hogy s^2-n-1 osztható 8-cal és $s^2-n-1 < n$. Mivel egy páratlan szám négyzetének a 8-as maradéka 1, ezért s^2-n-1 osztható 8-cal. Az $n < s^2 < 2n+1$ feltétel $n = 16$-ra ($s^2 = 25$-tel) teljesül, $n \geq 24$-re pedig azért igaz, mert 25-től kezdve az egymást követő páratlan négyzetszámok hányadosa kisebb, mint 2: $\left(\frac{x+2}{x}\right)^2 = \left(1 + \frac{2}{x}\right)^2 \leq \left(1 + \frac{2}{5}\right)^2 < 2.$