



Oktatási Hivatal

A 2014/2015. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási-értékelési útmutató

1. Tekintsük azokat az ötjegyű számokat, amelyek az 5, 6, 7, 8 számjegyeket tartalmazzák és mindegyiket legalább egyszer. Mennyi ezeknek az ötjegyű számoknak az összege?

Megoldás: A megadott számjegyek között nem szerepel a 0, ezért mindegyik ugyanannyiszor fordul elő a keresett számokban mind az öt helyiértéken. 1 pont

Elegendő tehát megnézni, hogy a négy számjegy közül az egyik hányszor fordul elő egy rögzített helyiértéken. 1 pont

Kiválasztjuk az öt helyiérték közül azt a kettőt, ahova azonos számjegy kerül. Ez 10-féleképpen lehetséges, mivel $\binom{5}{2} = 10$. A megmaradt három helyre a másik három számjegy 6-féleképpen kerülhet. Így $10 \times 6 = 60$ lehetőség van. 3 pont

Mivel az 5,6,7,8 jegyek mindegyike 60-szor fordul elő mind az öt helyiértéken, ezért a feladatban említett számok összege $60 \cdot (5 + 6 + 7 + 8) \cdot 11111 = 17333160$. 2 pont

Összesen 7 pont

2. Legyen C az AB szakasz belső pontja. Az AB szakasz azonos oldalára emeljük az AB , AC és CB átmérőjű félköröket. A C ponton át az AB -re emelt merőleges egyenes az AB -re emelt félkörívet a D pontban metszi. Az AD szakasz és az AC -re emelt félkörív metszéspontja E , a BD szakasz és a CB -re emelt félkörív metszéspontja F . Igazoljuk, hogy az EF egyenes az AC -re illetve CB -re emelt félkörívek közös érintője lesz.

Megoldás: Thalesz tétele alapján $ADB\angle = AEC\angle = CFB\angle = 90^\circ$. 1 pont

A $CEDF$ négyszög tehát téglalap. 1 pont

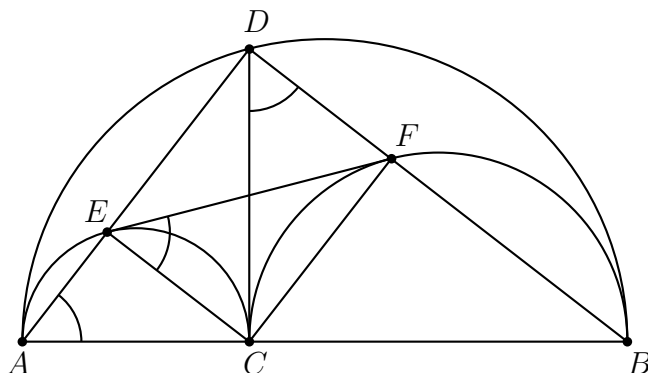
A téglalap szimmetrikus az oldalainak felezőmerőlegesére, így $FDC\angle = CEF\angle$. 1 pont

Másrészt $FDC\angle = DAB\angle$, hiszen merőleges szárú hegyesszögek. 1 pont

Tekintsük az AEC háromszög köré írt kört és abban az EC húrhoz tartozó $DAB\angle$ körületi szöget. Imént azt kaptuk, hogy $CEF\angle = DAB\angle$, ebből az következik, hogy $CEF\angle$

az EC húrhoz tartozó érintő szárú kerületi szög, azaz EF érintője az AEC háromszög köré írt körnek. 2 pont

Ugyanígy igazolható, hogy EF érinti a CB -re emelt félkörívét is. 1 pont



Összesen 7 pont

3. Legyen $a_1 = 1$, a sorozat további elemeit a következő összefüggés határozza meg:

$$a_{n+1}a_n = 4(a_{n+1} - 1), \quad n \text{ pozitív egész}$$

Igazoljuk, hogy a sorozat első 2025 darab tagjának szorzata nagyobb, mint 2^{2014} .

Megoldás: A képzési szabály alapján a sorozat első néhány eleme:

$$a_1 = 1, \quad a_2 = \frac{4}{3}, \quad a_3 = \frac{6}{4}, \quad a_4 = \frac{8}{5}, \quad a_5 = \frac{10}{6}, \quad \dots \quad 1 \text{ pont}$$

A sorozat első tagjait tekintve kialakulhat a sejtés, hogy $a_n = \frac{2n}{n+1}$. Ezt teljes indukcióval igazoljuk. 1 pont

Kezdő lépés: ha $n = 1$, akkor a definíció alapján $a_1 = 1$ és valóban $\frac{2 \cdot 1}{1+1} = 1$. 1 pont

Indukciós lépés: feltesszük, hogy az állítás igaz n -re és ennek segítségével bebizonyítjuk $n+1$ -re. Az alábbi számolásban először a_{n+1} -et kifejezzük a feladatban megadott rekurzív összefüggés segítségével, alkalmazzuk az indukciós feltevést, majd kiszámoljuk a_{n+1} -et és megkapjuk a bizonyítandót.

$$a_{n+1} = \frac{4}{4 - a_n} = \frac{4}{4 - \frac{2n}{n+1}} = \frac{4}{\frac{4n+4-2n}{n+1}} = \frac{2(n+1)}{n+2}. \quad 2 \text{ pont}$$

A sorozat első 2025 tagjának szorzata így könnyen számolható:

$$\frac{2}{2} \cdot \frac{2 \cdot 2}{3} \cdot \frac{2 \cdot 3}{4} \cdot \frac{2 \cdot 4}{5} \cdot \frac{2 \cdot 5}{6} \cdot \dots \cdot \frac{2 \cdot 2025}{2026} = \frac{2^{2025}}{2026} \quad 1 \text{ pont}$$

Most igazoljuk, hogy ez nagyobb, mint 2^{2014} :

$$\frac{2^{2025}}{2026} = 2^{2014} \cdot \frac{2^{11}}{2026} = 2^{2014} \cdot \frac{2048}{2026} > 2^{2014} \quad 1 \text{ pont}$$

Összesen 7 pont

4. Az ABC háromszög kerülete 12 cm , területe 6 cm^2 . Legyen P az ABC háromszög egy belső pontja. A P pontnak a BC , CA és AB oldalak egyenesére vonatkozó merőleges vetületei legyenek rendre D , E és F . Tekintsük az alábbi összeget

$$S = \frac{BC}{PD} + \frac{CA}{PE} + \frac{AB}{PF}.$$

- (a) Határozzuk meg S minimális értékét.
 (b) A háromszög mely P belső pontjára lesz S értéke minimális?

Megoldás: Jelölje a háromszög oldalait a szokásos módon a , b , és c és legyen továbbá $PD = x$, $PE = y$ és $PF = z$. Ezen jelölésekkel

$$S = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}.$$

Az ABC háromszög T területe az ABP , BCP és CAP háromszögek területének összegével egyenlő. Így $2T = ax + by + cz = 12\text{cm}^2$. 1 pont

Mivel T rögzített, ezért S pontosan akkor lesz minimális, amikor $2TS$, ezért vizsgáljuk ez utóbbit:

$$2TS = (ax + by + cz) \left(\frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z} \right) \quad 2 \text{ pont}$$

A szorzást elvégezzük és kihasználjuk, hogy pozitív szám és reciprokának összege legalább 2:

$$\begin{aligned} 2TS &= a^2 + b^2 + c^2 + ab \left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \right) + bc \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \right) + ca \left(\frac{z}{x} + \frac{x}{z} \right) \geq \\ &\geq a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca = (a + b + c)^2 = (12\text{cm})^2 \quad 2 \text{ pont} \end{aligned}$$

A becslés során használt $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geq 2$ egyenlőtlenségben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha $x = y$. $2TS$ és egyúttal S tehát akkor lesz minimális, ha $x = y = z$, azaz P a háromszög beírt körének középpontja. Mivel $2T = 12\text{cm}^2$ és $2TS$ minimumának értéke $(12\text{cm})^2$, ezért S minimális értéke 12. 2 pont

Összesen 7 pont

5. Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletrendszert

$$\sin^2 x + \cos^2 y = y^2, \quad \sin^2 y + \cos^2 x = x^2.$$

Megoldás: Mivel $\sin^2 x + \cos^2 x = \sin^2 y + \cos^2 y = 1$, ezért a kitűzött egyenletek összegéből a következőt kapjuk:

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 2$$

1 pont

A feladatban szereplő egyenletek megfelelő oldalainak a különbségét vizsgáljuk és felhasználjuk, hogy $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ és $\cos^2 y = 1 - \sin^2 y$. Ekkor

$$\sin^2 x - (1 - \sin^2 x) + (1 - \sin^2 y) - \sin^2 y = y^2 - x^2,$$

amiből a következőt kapjuk:

$$(2) \quad 2 \sin^2 x + x^2 = 2 \sin^2 y + y^2$$

1 pont

Az (1)-es egyenletből következik, hogy x és y is a $[-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$ intervallumban van. (Ugyanezt megkaphatjuk közvetlenül a kiindulási egyenletekből is, hiszen $-1 \leq \sin x \leq 1$ és $-1 \leq \cos x \leq 1$.)

1 pont

Ha x és y kielégítik (1)-et, akkor az abszolút értékük is megoldás. Ugyanez igaz a (2) egyenletre is, mivel a változók második hatványon szerepelnek, illetve a szinusz függvény páratlan és az is a négyzeten szerepel.

1 pont

Használjuk ki, hogy $\sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, a $2 \sin^2 x$ és x^2 függvény egyaránt szigorúan monoton növe a $[0; \sqrt{2}]$ intervallumon, tehát az összegük is.

1 pont

Tehát (1) és (2) csak akkor teljesülhet, ha $|x| = |y|$.

1 pont

Ezt (1)-gyel összevetve a következő négy $(x; y)$ megoldaspárt kapjuk:

$$(1; 1) \quad (1; -1) \quad (-1; 1) \quad (-1; -1).$$

1 pont

Összesen 7 pont