



Oktatási Hivatal

A 2015/2016. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Mely ABC háromszögekhez léteznek olyan e és f egyenesek, hogy az A pontot e -re, majd a kapott pontot f -re tükrözve B -t kapjuk, viszont az A -t előbb f -re, majd a kapott pontot e -re tükrözve C -t kapjuk?
2. Milyen alapú számrendszer esetén létezik olyan 1-nél nagyobb pozitív egész, amely megegyezik a számjegyei összegének a négyzetével?
3. Adott a síkon két kör egymás külsejében, sugaraik r és R . Egy egyenlő szárú háromszög alapja az egyik külső közös érintőszakaszon fekszik, szemközti csúcsa a másik külső közös érintőszakaszra illeszkedik, szárai pedig érintenek egyet-egyét a körök közül. Igazoljuk, hogy a háromszögnek az alaphoz tartozó magassága $r + R$.
4. Legyenek az n pozitív egésznél nem nagyobb prímek p_1, \dots, p_r . Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{i=1}^r \lfloor \log_{p_i} n \rfloor = \sum_{i=1}^r \left\lfloor \frac{n}{p_i} \right\rfloor - 2 \sum_{1 \leq i < j \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j} \right\rfloor + 3 \sum_{1 \leq i < j < k \leq r} \left\lfloor \frac{n}{p_i p_j p_k} \right\rfloor - \dots,$$

ahol $\lfloor x \rfloor$ az x szám (alsó) egészrészét jelenti.

5. Egy 2016 csúcsú teljes gráf csúcsaiba versenybolhákat ültetünk, éleit pedig megszámozzuk az $1, 2, \dots, \binom{2016}{2}$ természetes számokkal. A számokat ezután növekvő sorrendben felolvassuk. Minden egyes szám felolvasása után a számhoz tartozó él két végén ülő bolha helyet cserél. A verseny győztese a legtöbb helycserét végző bolha. (Holtverseny esetén több győztes is lehet.)
 - (a) Legfeljebb hány helycserét végezhet egy győztes bolha?
 - (b) Legalább hány helycserét kell végeznie egy győztes bolhának?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.