Oktatási Hivatal

A 2016/2017. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. Legyen $H = \{1, 2, ..., n\}$. Megadható-e két, közös elem nélküli A és B halmaz, melyek uniója éppen H úgy, hogy A elemeinek összege egyenlő B elemeinek szorzatával, ha (a) n=2016; (b) $n = 2017$?

2. Az ABC háromszög A-ból induló magasságának talppontja T, a B-ből induló szögfelező az AC oldalt D-ben metszi. Tudjuk, hogy $BDA\angle = 45°$. Mekkora a $DTC\angle$?

3. (a) Igazoljuk, hogy n különböző a_i/b_i alakú (de nem feltétlen különböző értékű) racionális számot kiválasztva a $(0; 1)$ intervallumból, a számok nevezőinek összege legalább

$$\frac{2\sqrt{2}}{3} \cdot n^{\frac{3}{2}}.$$

(b) Igazoljuk, hogy ha feltesszük a számokról, hogy különböző értékűek is, akkor a számok nevezőinek összege legalább

$$2\left(\frac{2}{3}n\right)^{\frac{3}{2}}.$$

Megjegyzés. Az a_i, b_i számok $i \in \{1, 2, \dots n\}$ pozitív egészek. Az $\frac{a_i}{b_i}$ és $\frac{a_j}{b_j}$ számok különböző alakúak, ha a számlálójuk, vagy nevezőjük közül legalább az egyik különböző. Az $\frac{a_i}{b_i}$ és $\frac{a_j}{b_j}$ számok különböző értékűek, ha $\frac{a_i}{b_i} \neq \frac{a_j}{b_j}$.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.