A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2017. november — A versenybizottság

1. feladat

Adott egy $P(x)$ egész együtthatós polinom. Bizonyítsuk be, hogy ha léteznek olyan a, b egészek, melyekre $|P(a)| = |P(b)| = 1$, továbbá $|a-b| \geq 3$, akkor a polinomnak nincs egész gyöke.

Megoldás: Indirekt módon tegyük fel, hogy a polinomnak van egész gyöke, azaz létezik olyan k egész szám, amelyre $P(k) = 0$. Ekkor a $P(x)$ polinom felírható $P(x) = (x-k) \cdot Q(x)$ alakban, ahol $Q(x)$ egész együtthatós polinom. (1 pont)

A $P(x)$ polinom a helyen felvett helyettesítési értéke $P(a) = (a-k) \cdot Q(a)$, továbbá a feladat feltétele szerint $|P(a)| = 1$, tehát $|(a-k) \cdot Q(a)| = 1$. (2 pont)

Mivel $a-k$ és $Q(a)$ egészek, ez csak úgy teljesülhet, ha $|a-k| = 1$. Hasonlóan kapjuk, hogy $|b-k| = 1$. (2 pont)

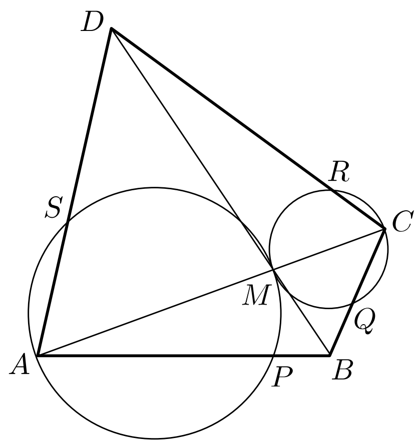
A számokra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenség alapján így $|a-b| \leq |a-k| + |b-k| = 2$, ami ellentmondásban van a feladat $|a-b| \geq 3$ feltételével. (2 pont)

Ezzel beláttuk, hogy a $P(x)$ polinomnak nincsen egész gyöke.

2. feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög átlóinak metszéspontja M. Az AM és CM szakaszok mint átmérők fölé egy-egy kört rajzolunk. Tegyük fel, hogy az első kör az AB, illetve AD oldalt a P, illetve S belső pontban, a második kör pedig a CB, illetve CD oldalt a Q, illetve R belső pontban metszi. Igazoljuk, hogy $AP \cdot BQ \cdot CR \cdot DS = BP \cdot CQ \cdot DR \cdot AS$.

Megoldás: Az ABM és DCM háromszögek hasonlók, mert két-két szögük egyenlő: az AMB és DMC szögek csúcsszögek, a BAM és CDM szögek pedig a húrnégyszög köré írt körnek a BC íven nyugvó kerületi szögei. (2 pont)



A két háromszögben az M-ből kiinduló magasságvonalak talppontjai Thalész tétele szerint P, illetve R. A hasonlóság miatt ezek azonos arányban osztják az AB, illetve CD oldalt: $\dfrac{AP}{BP} = \dfrac{DR}{CR}$. (2 pont)

Innen $AP \cdot CR = BP \cdot DR$. (1 pont)

Ugyanígy adódik, hogy $BQ \cdot DS = CQ \cdot AS$. (1 pont)

Az utolsó két egyenlőséget összeszorozva a feladat állítását kapjuk. (1 pont)

3. feladat

Legyenek A, B és C pozitív egész számok, melyekre $A^2 + B^2 + C$ osztható AB-vel. Definiáljuk az a_n sorozatot az

$$a_1 = A, \qquad a_2 = B, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n^2 + C}{a_{n-1}} \quad (n \geq 2)$$

rekurzióval. Bizonyítsuk be, hogy a_n minden n-re egész szám.

Első megoldás: A sorozat tagjai nyilván pozitívak, ezért oszthatunk velük. A rekurziós képletet a_{n+1}-re és a_{n+2}-re felírva és belőlük C-t kifejezve az

$$a_{n+1} \cdot a_{n-1} - a_n^2 = a_{n+2} \cdot a_n - a_{n+1}^2$$

egyenlőséget kapjuk, amelyet az

$$\frac{a_{n+1} + a_{n-1}}{a_n} = \frac{a_{n+2} + a_n}{a_{n+1}}$$

alakba rendezhetünk át. (2 pont)

Ebből következik, hogy az $(a_{n+1} + a_{n-1})/a_n$ hányados minden $n \geq 2$ mellett ugyanaz a d szám. (1 pont)

A d hányados értékét meghatározhatjuk az $n = 2$ esetből, amely szerint $d = (a_3 + a_1)/a_2$. Itt $a_1 = A$, $a_2 = B$, és az $n = 2$-re vonatkozó rekurziós képletből $a_3 = (B^2 + C)/A$. Behelyettesítve $d = (A^2 + B^2 + C)/(AB)$ adódik, ami a feladat oszthatósági feltevése miatt egész szám. (2 pont)

Ezzel a rekurzió képletét átírhatjuk az

$$a_{n+1} = d \cdot a_n - a_{n-1}$$

formába, amely minden $n \geq 2$ mellett érvényes. A sorozat $a_1 = A$, $a_2 = B$ kezdőtagjai egészek és d is egész, ezért a rekurzió minden további lépése is egész számot eredményez. (2 pont)

Második megoldás: Nevezzük az (A, B, C) rendezett hármast kedvező tulajdonságúnak, ha A, B, C pozitív egész számok, és $A^2 + B^2 + C$ osztható AB-vel. Megmutatjuk, hogy ha az (A, B, C) számhármas kedvező tulajdonságú, akkor a $\big(B, (B^2 + C)/A, C\big)$ számhármas szintén kedvező tulajdonságú. (2 pont)

Az $A^2 + B^2 + C$ szám osztható AB-vel, ezért A-val is. Így $B^2 + C$ is osztható A-val, és $(B^2 + C)/A$ is pozitív egész szám. Az új számhármas tehát pozitív egész számokból áll, (1 pont)

továbbá

$$B^2 + \left(\frac{B^2 + C}{A}\right)^2 + C = \frac{B^2 + C}{A} \cdot A + \left(\frac{B^2 + C}{A}\right)^2 =$$
$$= \frac{B^2 + C}{A} \cdot \left(A + \frac{B^2 + C}{A}\right) = \frac{B^2 + C}{A} \cdot \frac{A^2 + B^2 + C}{A}.$$

Itt $A^2 + B^2 + C$ osztható AB-vel, ezért $(A^2 + B^2 + C)/A$ osztható B-vel. A kapott kifejezés tehát osztható $B \cdot (B^2 + C)/A$-val, ami azt mutatja, hogy $\big(B, (B^2 + C)/A, C\big)$ valóban kedvező tulajdonságú. (2 pont)

A feladat feltétele szerint (a_1, a_2, C) kedvező tulajdonságú, ezért a fentiekből indukcióval következik, hogy minden $n \geq 2$ esetén (a_n, a_{n+1}, C) is kedvező tulajdonságú. Tehát a sorozat minden tagja egész szám. (2 pont)

Harmadik megoldás: A sorozat mindegyik tagja pozitív, ezért a rekurziós képlet minden n-re értelmes. Keressük a_n-et $c_1q_1^{n-1} + c_2q_2^{n-1}$ alakban. A rekurziós képletbe behelyettesítve átrendezés és egyszerűsítés után az alábbi egyenletet kapjuk:

$$c_1c_2(q_1q_2)^{n-2}(q_1^2 + q_2^2) = 2c_1c_2(q_1q_2)^{n-1} + C \qquad \text{(1 pont)}$$

Próbáljuk meg q_1q_2-t 1-nek választani. Ekkor

$$c_1c_2(q_1^2 + q_2^2 - 2) = C\,.$$

Mivel a sorozatot az első két tag és a rekurziós képlet egyértelműen meghatározza, ezért ha valamely c_1, c_2, q_1, q_2 számokra teljesül, hogy

$$q_1q_2 = 1\,, \quad c_1c_2(q_1^2 + q_2^2 - 2) = C\,, \quad c_1 + c_2 = A\,, \quad c_1q_1 + c_2q_2 = B\,,$$

akkor minden $n \geq 1$-re $a_n = c_1q_1^{n-1} + c_2q_2^{n-1}$. (1 pont)
A második egyenlet

$$c_1c_2(q_2 - q_1)^2 = C$$

alakban írható, hiszen $q_1q_2 = 1$.
Az utolsó két egyenletből

$$(q_2 - q_1)c_1 = Aq_2 - B \quad \text{és} \quad (q_2 - q_1)c_2 = B - Aq_1\,.$$

Ezeket összeszorozva és ismét felhasználva, hogy $q_1q_2 = 1$,

$$C = c_1c_2(q_2 - q_1)^2 = (Aq_2 - B)(B - Aq_1) = AB(q_1 + q_2) - A^2 - B^2\,.$$

Tehát

$$q_1 + q_2 = \frac{A^2 + B^2 + C}{AB}\,, \qquad \text{(1 pont)}$$

jelöljük ezt a hányadost d-vel.
Ilyen q_1 és q_2 létezik: ezek az $x^2 - dx + 1 = 0$ egyenlet gyökei. Sőt, $q_1 \neq q_2$, és mindkettő valós. Valóban, a megoldóképletben a négyzetgyök alatti szám $d^2 - 4 > 0$, hiszen

$$d - 2 = \frac{A^2 + B^2 + C - 2AB}{AB} = \frac{(A - B)^2 + C}{AB} > 0\,. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ezért az egyenletrendszernek megoldása az így kapott q_1 és q_2, valamint

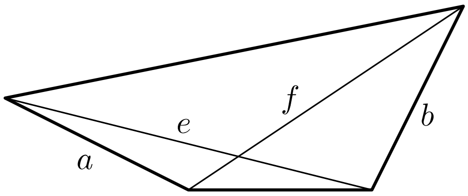
$$c_1 = \frac{Aq_2 - B}{q_2 - q_1} \quad \text{és} \quad c_2 = \frac{B - Aq_1}{q_2 - q_1}\,.$$

Beláttuk, hogy erre a megoldásra $a_n = c_1q_1^{n-1} + c_2q_2^{n-1}$ teljesül. (1 pont)
Mivel q_i gyöke az $x^2 = dx - 1$ egyenletnek, ezért a q_i^n sorozat, és így az a_n sorozat is teljesíti az $a_{n+1} = da_n - a_{n-1}$ rekurziót. A d szám feltételünk szerint egész, ezért a sorozat valamennyi tagja az. (2 pont)

4. feladat
Mutassuk meg, hogy bármely konvex hatszögben a kilenc darab átló hosszának összege nagyobb a kerület másfélszeresénél.

Megoldás: Az alábbi, konvex négyszögekre vonatkozó egyenlőtlenséget a megoldásban többször fel fogjuk használni:

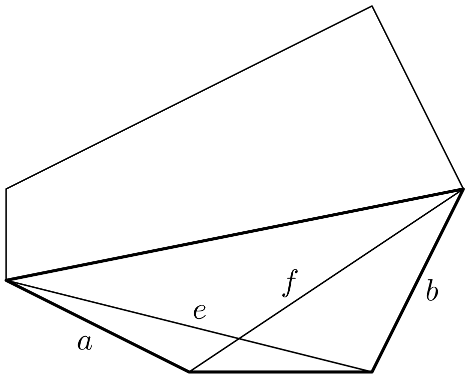
(∗) Ha egy konvex négyszög két szemközti oldala a és b, a két átlója pedig e és f, akkor $e + f > a + b$.



Valóban, konvex négyszögben a két átló metszi egymást, ezért felírhatjuk az általuk kialakított két szemközti részháromszögben az a, illetve b oldalra vonatkozó háromszög-egyenlőtlenségeket. Ezeket összeadva éppen a fenti egyenlőtlenséget kapjuk. (2 pont)

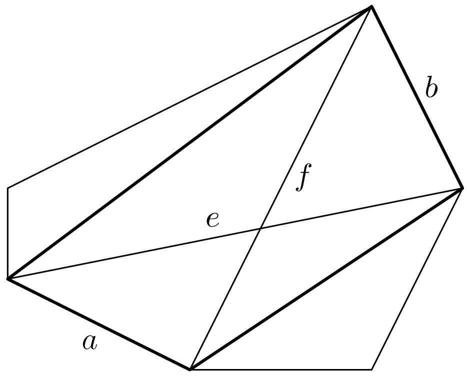
Egy hatszög átlói között három olyan van, amely átellenes csúcsokat köt össze, nevezzük ezeket főátlóknak. A többi hat átló másodszomszédos csúcsok között fut, ezeket mellékátlóknak hívjuk. Meg fogjuk mutatni, hogy konvex hatszög esetében a mellékátlók összege a kerületnél, a főátlók összege pedig a kerület felénél nagyobb. (1 pont)

Tekintsük először a mellékátlókat. A hatszög körüljárása a mellékátlók ciklikus felsorolását származtatja. Szemeljünk ki kettőt, e-t és f-et, amelyek szomszédosak ebben a felsorolásban. Ez a két átló metszi egymást, és egy olyan konvex négyszögnek a két átlója, amelyet a hatszög négy egymás után következő csúcsa feszít ki. Ennek a négyszögnek két szemközti oldala, a és b, egyúttal a hatszögnek is két másodszomszédos oldala. (1 pont)



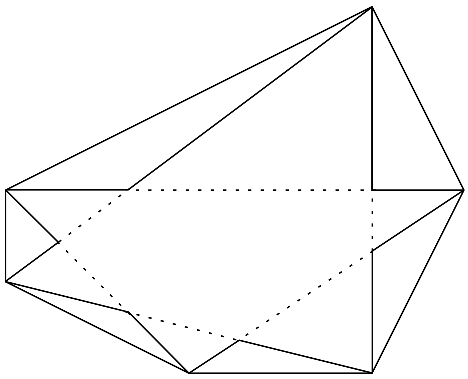
Alkalmazzuk a (∗) egyenlőtlenséget erre a négyszögre, valamint a többi öt ugyanilyen módon keletkező négyszögre olyanformán, hogy a négyszögeknek mindig azokat a szemközti oldalait tekintjük, amelyek a hatszögnek is oldalai. A hat egyenlőtlenségben együtt a hatszög mindegyik mellékátlója is és mindegyik oldala is kétszer szerepel, ezért azokat összeadva azt kapjuk, hogy a mellékátlók összegének kétszerese nagyobb a kerület kétszeresénél. (1 pont)

Térjünk át a főátlókra. Most azt a három konvex négyszöget tekinthetjük, amelynek a csúcsait úgy kapjuk, hogy a hatszög csúcsai közül elhagyunk két átelleneset (mindhárom lehetséges módon). Egy ilyen négyszögnek az átlói a hatszög főátlói közül kettő, és az egyik szemközti oldalpárja egyúttal a hatszögnek is szemközti oldalpárja. (1 pont)



Írjuk föl erre a három négyszögre is a $(*)$ egyenlőtlenséget (persze most is a négyszögeknek azokat a szemközti oldalait szerepeltetve, amelyek a hatszögben is oldalak), majd adjuk őket össze. A három egyenlőtlenségben együttesen mindegyik főátló kétszer, illetve a hatszög mindegyik oldala pontosan egyszer szerepel, ezért az összeadással azt kapjuk, hogy a főátlók összegének a kétszerese nagyobb a kerületnél. (1 pont)

Megjegyzések: (1) A mellékátlók összegére vonatkozó egyenlőtlenség egyszerűen belátható más úton is.



A hatszög konvexitása miatt egy-egy mellékátlón a két vele szomszédos mellékátlóval vett metszéspontok a hatszög körüljárását követő sorrendben állnak. Emiatt mindegyik mellékátlóból a rajta keletkező három részszakasz közül a középsőt elhagyva a maradék részszakaszokból és a hatszög oldalaiból hat darab háromszög áll össze. Ezekre a háromszög-egyenlőtlenségeket összeadva kapjuk, hogy a mellékátlók összege nagyobb a kerületnél. Erre a gondolatmenetre is 2 pont adható.

(2) Konkrét példákkal könnyen megmutatható, hogy a feladatban szereplő másfeles szorzó helyett nem állíthatunk nagyobbat: bármely $c > 3/2$ számhoz létezik olyan konvex hatszög, amelyben az átlók összege kisebb a kerület c-szeresénél.

(3) Az ismertetett megoldás módszerével be lehet bizonyítani, hogy általánosabban, minden $n \geq 4$ esetén bármely n-oldalú konvex sokszögben az átlók összege nagyobb, mint a kerület $(n-3)/2$-szerese, továbbá ez a szorzó sem javítható.

5. feladat

Legyen $n \geq 2$ egész, és $a_1, a_2, \ldots, a_n$ legyenek páronként különböző számok. Bizonyítsuk be, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} = 0\,.$$

Első megoldás: Az állítást n-re vonatkozó teljes indukcióval bizonyítjuk. Legyen először $n = 2$, és $a_1 \neq a_2$. Ekkor

$$\sum_{k=1}^{n} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} = \frac{1}{a_1 - a_2} + \frac{1}{a_2 - a_1} = 0\,,$$

tehát az állítás igaz. (1 pont)

Legyen most $n \geq 3$, és tegyük fel, hogy az állítás igaz $(n-1)$-re. Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n$ páronként különbözők. Az indukciós hipotézist az $a_1, a_2, \ldots, a_{n-1}$, illetve az $a_2, a_3, \ldots, a_n$ számokra alkalmazva kapjuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1} \frac{1}{a_k - a_j} = 0 \quad \text{és} \quad \sum_{k=2}^{n} \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} = 0\,.$$

Az egyenleteket kivonva egymásból:

$$\prod_{j=2}^{n-1} \frac{1}{a_1 - a_j} + \sum_{k=2}^{n-1} \left(\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1} \frac{1}{a_k - a_j} - \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} \right) - \prod_{j=2}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_j} = 0\,. \qquad (**)$$

(2 pont)

Tekintsük a középen álló összeg k-adik tagját, ez az $n-3$ darab közös szorzótényező kiemelésével egyszerűsíthető:

$$\prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n-1} \frac{1}{a_k - a_j} - \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} = \left(\frac{1}{a_k - a_1} - \frac{1}{a_k - a_n} \right) \prod_{\substack{j=2 \\ j\neq k}}^{n-1} \frac{1}{a_k - a_j} =$$

$$= (a_1 - a_n) \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j}\,.$$

(2 pont)

A $(**)$ egyenletet $a_1 - a_n \neq 0$-val osztva tehát

$$\prod_{j=2}^{n} \frac{1}{a_1 - a_j} + \sum_{k=2}^{n-1} \prod_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} \frac{1}{a_k - a_j} + \prod_{j=1}^{n-1} \frac{1}{a_n - a_j} = 0\,,$$

ami éppen a bizonyítandó állítás. (2 pont)

Második megoldás: Legyen $1 \leq k \leq n$ esetén

$$\ell_k(x) = \frac{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (x - a_j)}{\prod\limits_{\substack{j=1 \\ j\neq k}}^{n} (a_k - a_j)}.$$

Nyilván $\ell_k(a_k) = 1$, és ha $j \neq k$, akkor $\ell_k(a_j) = 0$. (2 pont)
Ezért az

$$f(x) = \ell_1(x) + \ldots + \ell_n(x) - 1$$

polinomnak mindegyik a_k szám gyöke. (1 pont)
Mivel f foka legfeljebb $n-1$, de van n különböző gyöke, ezért f csak a nullapolinom lehet. (2 pont)
Az f polinomban az x^{n-1} együtthatója tehát nulla, de ez az együttható pontosan az a kifejezés, ami a feladatban szerepel. (2 pont)

Harmadik megoldás: Felhasználjuk az alábbi tényt az ún. *Vandermonde-determináns* kiszámításáról (lásd pl. Freud Róbert: Lineáris algebra, 1.5.2. Tétel):

$$V(a_1, \ldots, a_n) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq j<k\leq n} (a_k - a_j).$$

Legyen M az alábbi $n \times n$-es mátrix:

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & a_1^2 & \ldots & a_1^{n-2} & 1 \\ 1 & a_2 & a_2^2 & \ldots & a_2^{n-2} & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & a_n & a_n^2 & \ldots & a_n^{n-2} & 1 \end{pmatrix}.$$

Ennek a determinánsa nulla, hiszen az első és utolsó oszlopa egyenlő. Ezért elég megmutatni, hogy a feladatban szereplő kifejezés $\det(M)/V(a_1, \ldots, a_n)$. (3 pont)
Fejtsük ki M determinánsát az utolsó oszlop szerint. (Determinánsok kifejtéséről Freud Róbert fenti tankönyvének 1.4. szakaszában olvashatunk.) A k-adik sor utolsó eleméhez tartozó előjeles aldeterminánst jelölje M_k. Ekkor tehát $M_1 + \ldots + M_k = 0$. Azt fogjuk kiszámolni, hogy $M_k/V(a_1, \ldots, a_n)$ a feladatban szereplő összeg k-adik tagja.
A sakktábla-előjel $(-1)^{k+n}$, maga az aldetermináns pedig Vandermonde-féle, amelynek generátorai közül az a_k hiányzik. Ezt $V(a_1, \ldots, a_n)$-el elosztva tehát az eredmény az előjellel együtt

$$\frac{(-1)^{k+n}}{\prod\limits_{j=1}^{k-1}(a_k - a_j) \prod\limits_{j=k+1}^{n} (a_j - a_k)}.$$ (2 pont)

A feladatbeli összeg k-adik tagjában szereplő szorzat nevezőjében az $a_k - a_j$ különbségek úgy szerepelnek, hogy a_k áll mindig elöl. Az előző képletben tehát $\prod_{j=k+1}^{n}(a_j - a_k)$ kicserélendő $\prod_{j=k+1}^{n}(a_k - a_j)$-re. Ez $n - k$ előjelváltást jelent, ami a számlálóval együtt $(-1)^{k+n}/(-1)^{n-k} = (-1)^{2k} = 1$-gyel való szorzást jelent. Ezzel az állítást beláttuk.

(2 pont)

Megjegyzések: (1) A második megoldásban szereplő $\ell_k(x)$ az úgynevezett *Lagrange-féle interpolációs alappolinomok* egyike. Erről pl. Kiss Emil Bevezetés az algebrába című tankönyvében a 2.4.12. gyakorlatban olvashatunk.

(2) Mind a második, mind a harmadik megoldásból könnyen leolvasható, hogy a feladat állítása akkor is érvényben marad, ha az összeg k-adik tagjának számlálójában 1 helyett $p(a_k)$ szerepel, ahol p egy rögzített, legfeljebb $n - 2$ fokú polinom (amelynek együtthatói $a_1, \ldots, a_n$-től függetlenek).