



A 2017/2018. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. A Tatuin bolygó arról híres, hogy az egén két nap ragyog. A Tatuin ugyanis az A és B csillagokból álló kettőscsillag-rendszer körül kering. A bolygót az Erő olyan körpályán tartja, amely a síkjában tartalmazza az AB szakaszt, középpontja az AB szakasz egy C belső pontja, és sugara az AB távolságnál nagyobb. Az A , B , C pontok és a körpálya r sugara ismeretében szerkesszük meg a pályának azt a pontját, ahonnan nézve a Tatuin egén a két nap a lehető legnagyobb szögtávolságra látszik egymástól.
2. Legyen $p \geq 1$ egész szám. Egy egységnyi kerületű körvonalon p darab pontot pirosra színezünk úgy, hogy a kör bármelyik, piros ponton át nem haladó átmérőegyenesének a két oldalán a piros pontok számának az eltérése legfeljebb 100. Bizonyítsuk be, hogy a körvonal bármely pontjának a piros pontoktól mért köri távolságainak az összege legalább $(p/4) - 25$. (Két pont köri távolságán az őket összekötő két körív közül a rövidebbnek az ívhosszát értjük.)
3. Létezik-e minden k természetes számra olyan pozitív egészekből álló k -elemű halmaz, amelynek minden nemüres részhalmazában az elemek összege teljes hatvány? (Egy számot teljes hatványnak nevezünk, ha a^q alakban írható, ahol a és q természetes számok, $q \geq 2$.)