Oktatási Hivatal

A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

<u>Javítási–értékelési útmutató</u>

1. Az $1, 2, ..., 4n$ számokat be szeretnénk osztani n darab négyes csoportba úgy, hogy minden csoportban legyen olyan szám, amelyik a másik három számtani közepe.

Létrehozhatók-e a csoportok, ha (a) $n = 4$; (b) $n = 7$?

Megoldás: (a) A feladat feltétele azt jelenti, hogy minden csoportban van egy olyan szám, amelyik a másik három összegének a harmada. 1 pont

Az 1, 2, ..., 16 számok beoszthatók a kívánt módon négy csoportba. Mutatunk erre egy lehetséges példát, minden négyesben aláhúzva azt a számot, amelyik a másik három számtani közepe: (1,<u>9</u>,11,15), (2,<u>10</u>,12,16), (3,5,<u>7</u>,13) és (4,6,<u>8</u>,14). 2 pont

(b) Az $n = 7$ feltétel azt jelenti, hogy az 1, 2, ..., 28 számokat szeretnénk beosztani. Ha sikerül létrehozni a csoportokat, akkor minden csoportban a négy szám összege éppen a számtani közepük négyszerese lesz, így minden csoportban a számok összege osztható 4-gyel. 2 pont

Ezek szerint az $1 + 2 + ... + 28$ összegnek is oszthatónak kell lennie 4-gyel. Másrészt

$$1 + 2 + ... + 28 = \frac{28 \cdot 29}{2} = 14 \cdot 29 = 2 \cdot 7 \cdot 29,$$

ami nem osztható 4-gyel, ezért nem lehet a csoportokat létrehozni. 2 pont

Összesen 7 pont

2. Melyik a nagyobb szám: $\sqrt[2018]{2018!}$ vagy $\sqrt[2019]{2019!}$?

Megoldás: Definíciójuk szerint mindkét szám pozitív, ezért bármely pozitív egész kitevőre emelve őket a nagyság szerinti relációjuk nem változik meg. 1 pont

Emeljük mindkét számot a $2018 \cdot 2019$-ik hatványra:

$$\left(\sqrt[2018]{2018!}\right)^{2018 \cdot 2019} = (2018!)^{2019}, \quad \left(\sqrt[2019]{2019!}\right)^{2018 \cdot 2019} = (2019!)^{2018}.$$

2 pont

Mindkét számot eloszthatjuk ugyanazzal a pozitív számmal, nagyság szerinti relációjuk nem változik. 1 pont

Ha $(2018!)^{2018}$-nal osztunk, akkor a két szám értéke így alakul:

$$\frac{(2018!)^{2019}}{(2018!)^{2018}} = 2018!, \quad \frac{(2019!)^{2018}}{(2018!)^{2018}} = 2019^{2018}.$$ 2 pont

Most már könnyű összehasonlítani a két számot, hiszen mindkettő egy 2018 tényezős szorzat. Az első szorzat minden tényezője kisebb a második szorzat minden tényezőjénél, tehát

$$2018! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2018 < 2019^{2018}, \quad \text{így} \quad \sqrt[2018]{2018!} < \sqrt[2019]{2019!}.$$ 1 pont

Összesen 7 pont

3. Egy kockán kijelölünk egy csúcsot, legyen ez A. Innen indulunk és lépkedünk a csúcsokon. Minden lépésben egy szomszédos csúcsba lépünk, éppen 1/3 valószínűséggel választva a három lehetőség közül. (Két csúcs akkor szomszédos, ha a kocka valamelyik éle összeköti őket.)

Mennyi a valószínűsége, hogy az ötödik lépés után az A-ból induló testátló másik végpontjába jutunk?

Megoldás: Helyezzük a kockát a koordináta-rendszerbe úgy, hogy a kiindulási csúcs az origó legyen, a kocka élei pedig a tengelyekkel párhuzamosak legyenek. A lépegetésünket írjuk le oly módon, hogy minden lépést az x, y, z tengelyek azon betűjével jelzünk, amellyel párhuzamosan éppen lépünk. Mivel minden csúcsból mind a három irányba egy él indul, ezért ez a leírás kölcsönösen egyértelműen jelzi az utat.

Az 5 lépés így egy 5 betűs jelsorozattal írható le. Mivel minden lépésben 1/3, azaz egyenlő valószínűséggel választunk a három lehetséges betű közül, ezért a keresett valószínűséget számolhatjuk oly módon, hogy a testátló végpontjába vezető 5 lépéses utak számát osztjuk az összes 5 lépéses út számával. 2 pont

Egy út akkor vezet az origóból induló testátló végpontjába, ha két irány egyszer, a harmadik irány pedig háromszor szerepel, ami jelölésünkkel például így nézhet ki: $xxyzx$. 1 pont

A háromszor szereplő betű háromféle lehet, ennek helye az 5 betű közt $\binom{5}{3}=10$ – féleképpen válaszhtató, a maradék két helyre a kimaradt két betű kétféleképpen írható. Így a számlálóba $3 \cdot 10 \cdot 2$ kerül. 2 pont

Az összes ötlépéses út száma 3^5, hiszen minden betű egymástól függetlenül háromféle lehet. 1 pont

Ezek alapján a keresett valószínűség:

$$\frac{3 \cdot 10 \cdot 2}{3^5} = \frac{20}{81}.$$ 1 pont

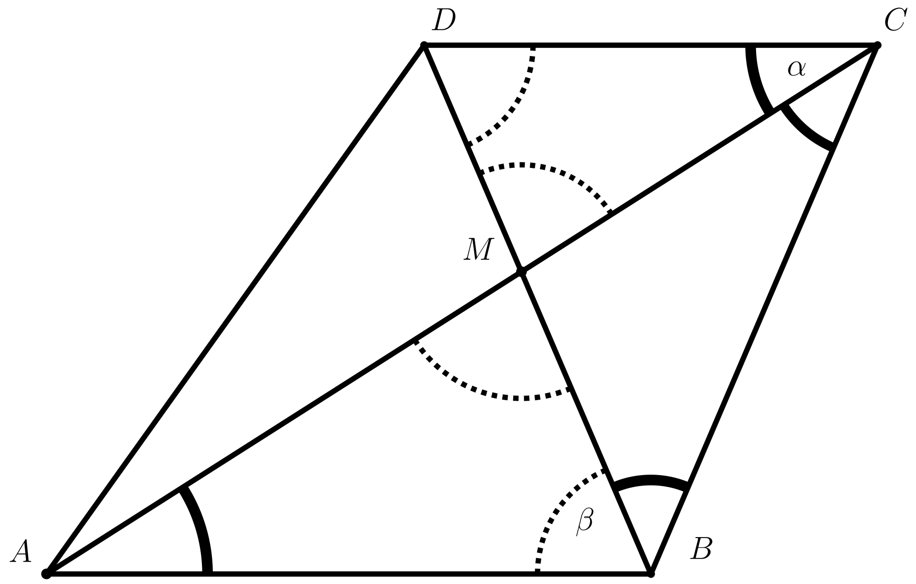
Összesen 7 pont

4. Az $ABCD$ trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, az átlók metszéspontját jelölje M. Tudjuk, hogy $CB = AM$ és $CD = BM$, továbbá CA a $BCD\angle$ szögfelezője.
Mekkora az $ADC\angle$?

Megoldás: Az alábbi ábrát használva megmutatjuk, hogy az azonosan jelölt szögek egyenlők. Legyen $DCA\angle = \alpha$ és $ABD\angle = \beta$. A feladat szövege alapján tudjuk, hogy $DCA\angle = ACB\angle$. A trapéz AB és CD oldalai párhuzamosak, így $DCA\angle = CAB\angle$ váltószögek. Azt kaptuk, hogy az ABC háromszögben A-nál és C-nél levő szögek egyenlők, így $AB = BC$. 1 pont

Másrészt a feladat feltételei szerint $CB = AM$, tehát AMB egyenlő szárú háromszög, $ABD\angle = AMB\angle$. Mivel $AMB\angle = DMC\angle$ csúcsszögek és $ABM\angle = BDC\angle$ váltószögek, így DMC is egyenlő szárú háromszög, $DC = MC$. 1 pont

Ezt összevetve a feladat szövegében szereplő $CD = BM$ feltétellel kapjuk, hogy $BM = MC$ és így $ACB\angle = CBM\angle$. 1 pont



Az AMB háromszög szögeit összegezve: $\alpha + 2\beta = 180°$. Az ABC háromszög szögeit összegezve $3\alpha + \beta = 180°$. Tekintsük a második egyenlet kétszeresét és ennek megfelelő oldalaiból vonjuk le az első egyenlet megfelelő oldalait. Ebből $5\alpha = 180°$, amiből $\alpha = 36°$ és $\beta = 72°$. 2 pont

Azt kaptuk, hogy $\beta = 2\alpha$ és ebből kapjuk, hogy DBC egyenlő szárú háromszög, $DB = CB$. Mivel $CB = AB$, ezért $DB = AB$, az ADB egyenlő szárú háromszög, a szárak által bezárt szög $72°$, tehát $ADB\angle = 54°$. 1 pont

A feladatban kérdezett $ADC\angle$ értékét most már tudjuk:

$$ADC\angle = ADB\angle + BDC\angle = 54° + 72° = 126°. \qquad 1 \text{ pont}$$

Összesen 7 pont

5. Mi lehet az a pozitív egész szám, amelynek összesen 10 pozitív osztója van, ebbe beleszámoltuk az 1-et és magát a számot is, és ennek a tíz számnak az összege 34364?

Megoldás: Ha az n pozitív egész prímtényezős felbontása $n = p_1^{a_1} \cdot_2^{a_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{a_k}$, akkor az n pozitív osztóinak száma

$$(a_1 + 1) \cdot (a_2 + 1) \cdot \ldots \cdot (a_k + 1).$$

Mivel a feladatban szereplő számnak 10 pozitív osztója van, ezért a keresett szám prímtényezős felbontása p^9, vagy $p_1 \cdot p_2^4$. 1 pont

Ha p^9, akkor az összes osztó összege $1 + p + p^2 + p^3 + \ldots + p^9$. Ennek értéke $p = 2$ és $p = 3$ esetén kisebb, $p \geq 5$ esetén pedig nagyobb, mint 34364. 1 pont

A másik esetben az osztók összege

$$(1 + p_1)(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + p_2^4).$$ 1 pont

A 34364-et szeretnénk két szám szorzataként felírni úgy, hogy az egyik tényező egy prímnél eggyel nagyobb legyen, a másik tényező pedig $1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + p_2^4$ legyen. 1 pont

$34364 = 2^2 \cdot 11^2 \cdot 71$, osztóinak száma az említett összefüggés szerint 18. Mivel kéttényezős szorzatként szeretnénk felírni, vehetjük a 9 lehetséges osztópárt:

$$1 \cdot 34364 = 2 \cdot 17182 = 4 \cdot 8591 = 11 \cdot 3124 = 22 \cdot 1562 =$$

$$= 44 \cdot 781 = 71 \cdot 484 = 121 \cdot 284 = 142 \cdot 242.$$ 1 pont

Az említett feltételeknek ezek közül két felbontás felel meg. A $44 \cdot 781$ esetén $p_1 = 43$ és $p_2 = 5$, így a szám $43 \cdot 625 = 26875$. A másik a $121 \cdot 284$, ekkor $p_1 = 283$ és $p_2 = 3$, a szám pedig $283 \cdot 81 = 22923$. 2 pont

Összesen 7 pont