Oktatási Hivatal

A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - y)(y - z)(z - x)$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében.

2. Az 1, 2, ..., n számok közül kiválasztható-e úgy egy k szám, hogy az alábbi M kifejezés értéke négyzetszám legyen, ha (a) $n = 2019$; (b) $n = 2020$?

$$M = \frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!}{k!}$$

3. Az ABC háromszög A-ból induló szögfelezője a BC oldalt D-ben metszi. Az ABD háromszög beírt köre az AB oldalt E-ben, az ADC háromszög beírt köre az AC oldalt H-ban érinti. Igazoljuk, hogy az EH egyenes az említett két körből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki.

4. (a) Hány részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, \ldots, 10\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata osztható 30-cal?
(b) Hány olyan S részhalmaza van H-nak, amelyre S minden elemének valamely szomszédja is S-beli (azaz ha $x \in S$, akkor van olyan $y \in S$, amelyre $|x - y| = 1$)?
Megjegyzés: A feladat (a) részénél az elemek szorzatát az üres halmaz esetén tekintsük 0-nak, az egy elemű $\{x\}$ részhalmaz esetén pedig x-nek. A feladat (b) részénél a megfelelő részhalmazok között meg kell számolnunk az üres halmazt és magát a H halmazt is.

Valamennyi feladat 7 pontot ér.