A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Bizonyítsuk be, hogy az

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x - y)(y - z)(z - x)$$

egyenletnek végtelen sok megoldása van az egész számok körében.

Megoldás: Egy lehetséges indulás, hogy legyenek az ismeretlenek $x = n$, $y = 2n$, $z = 3n$. Ekkor az egyenlet így alakul: $14n^2 = 2n^3$, ami $n = 7$ esetén teljesül. 2 pont

Ennek mintájára készíthetünk további megoldásokat. Legyen $x = (2k - 1)n$, $y = 2kn$, $z = (2k + 1)n$. Ekkor az egyenlet így alakul: $(12k^2 + 2)n^2 = 2n^3$, ami $n = 6k^2 + 1$ esetén teljesül. 3 pont

Végtelen sok megoldást kapunk tehát például úgy, hogy választunk egy tetszőleges k egész számot, majd ennek segítségével definiáljuk a három ismeretlen értékét:

$$x = (2k - 1)(6k^2 + 1), \quad y = 2k(6k^2 + 1), \quad z = (2k + 1)(6k^2 + 1).$$ 2 pont

Amennyiben a versenyző észreveszi, hogy az $x = y = z = 0$, vagy az $x = -1$, $y = 0$, $z = 1$ megoldás, de más megoldást nem talál, 1 pontot kap.

Összesen 7 pont

2. Az 1, 2, ..., n számok közül kiválasztható-e úgy egy k szám, hogy az alábbi M kifejezés értéke négyzetszám legyen, ha (a) $n = 2019$; (b) $n = 2020$?

$$M = \frac{1! \cdot 2! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot n!}{k!}$$

Megoldás: (a) Megmutatjuk, hogy nem választható ki ilyen k szám. Ha M négyzetszám, akkor a prímtényezős felbontásában minden prím páros hatványon szerepel. 1 pont

Tekintsünk a $p = 2017$ prímet. Ez az M kifejezés számlálójában háromszor szerepel, tehát M csak úgy lehet négyzetszám, ha k a 2017, 2018, 2019 valamelyike. 1 pont

Másrészt tekintsük a $q = 997$ prímet. Ez M számlálójában 2019-996=1023-szor, azaz páratlan sokszor szerepel. M számlálójának prímtényezős felbontásában a $2q = 1994$ minden egyes előfordulása eggyel növeli q kitevőjét. Így összesen q kitevője M számlálójában 1023+(2019-1993)=1049, azaz páratlan. 1 pont

Ha k a 2017, 2018, 2019 valamelyike, akkor M prímtényezős felbontásában a 997 kitevője 1047 lesz, ami páratlan. 1 pont

(b) Megmutatjuk, hogy kiválasztható ilyen k szám. M számlálója ekkor így írható:

$$1! \cdot (2 \cdot 1!) \cdot 3! \cdot (4 \cdot 3!) \cdot \ldots \cdot 2019! \cdot (2020 \cdot 2019!) =$$

$$= 1!^2 \cdot 3!^2 \cdot \ldots \cdot 2019!^2 \cdot (2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 2020) =$$

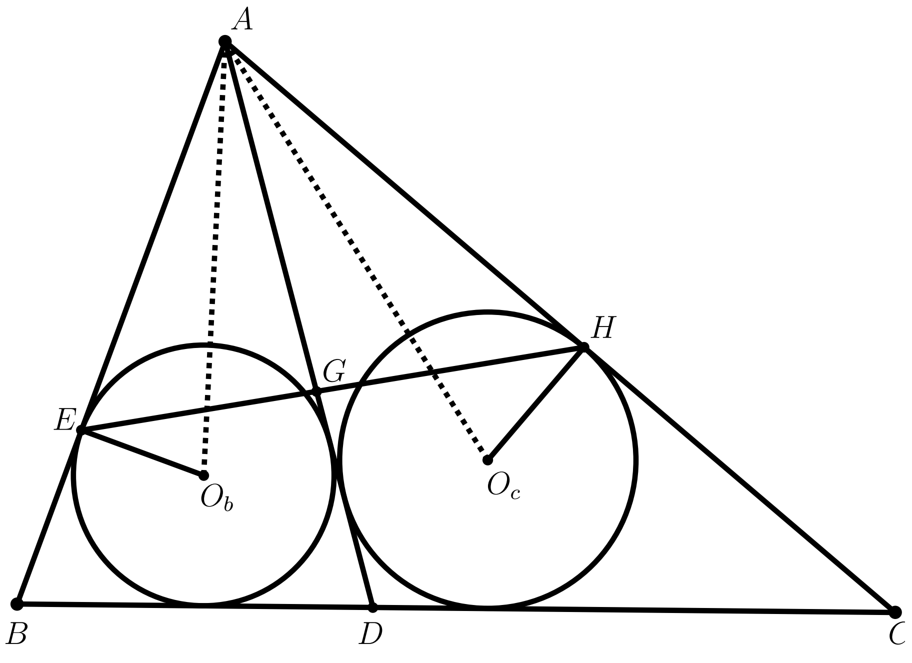
$$= (1! \cdot 3! \cdot \ldots \cdot 2019!)^2 \cdot 2^{1010} \cdot 1010!. \qquad 2 \text{ pont}$$

Ebből következik, hogy $k = 1010$ esetén M négyzetszám lesz. 1 pont

Összesen 7 pont

3. Az ABC háromszög A-ból induló szögfelezője a BC oldalt D-ben metszi. Az ABD háromszög beírt köre az AB oldalt E-ben, az ADC háromszög beírt köre az AC oldalt H-ban érinti. Igazoljuk, hogy az EH egyenes az említett két körből egyenlő hosszúságú húrokat metsz ki.

Megoldás: Legyen az ABD háromszögbe írt kör k_b, középpontja O_b, sugara r_b. Hasonlóan legyen az ADC háromszögbe írt kör k_c, középpontja O_c, sugara r_c, továbbá AD és EH metszéspontja G. Az EH egyenes a k_b körből $2 \cdot O_bE \cdot \cos O_bEH\angle = 2 \cdot r_b \cdot \cos O_bEH\angle$, a k_c-ből $2 \cdot O_cH \cdot \cos O_cHE\angle = 2 \cdot r_c \cdot \cos O_cHE\angle$ nagyságú húrt metsz ki. 1 pont



Mivel O_bE és O_cH merőlegesek az AB és AC oldalakra, így $\cos O_bEH\angle = \sin AEH\angle$ és $\cos O_cHE\angle = \sin AHE\angle$. A két húr ezek szerint akkor egyenlő, ha

$$2r_b \sin AEH\angle = 2r_c \sin AHE\angle. \qquad \text{1 pont}$$

Írjuk fel a színusz tételt az AEG és AGH háromszögekben és használjuk ki, hogy ezen két háromszögben az A csúcsnál levő szög $\frac{\alpha}{2}$. Ekkor

$$\sin AEH\angle = \frac{AG}{EG}\sin\frac{\alpha}{2}, \quad \sin AHE\angle = \frac{AG}{GH}\sin\frac{\alpha}{2}. \qquad \text{2 pont}$$

Ezeket beírva a bizonyítandóba és elvégezve az egyszerűsítéseket kapjuk:

$$\frac{r_b}{EG} = \frac{r_c}{GH}, \quad \text{azaz} \quad \frac{r_b}{r_c} = \frac{EG}{GH}. \qquad \text{1 pont}$$

Az AEH háromszögre alkalmazhatjuk a szögfelező tételt, e szerint $\frac{EG}{GH} = \frac{AE}{AH}$, ebből a bizonyítandó $\frac{r_b}{r_c} = \frac{AE}{AH}$. 1 pont

Ez viszont nyilván igaz, hiszen $r_b = AE \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$ és $r_c = AH \cdot \mathrm{tg}\frac{\alpha}{4}$. 1 pont

Összesen 7 pont

4. (a) Hány részhalmaza van a $H = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ halmaznak, amelyben az elemek szorzata osztható 30-cal?
(b) Hány olyan S részhalmaza van H-nak, amelyre S minden elemének valamely szomszédja is S-beli (azaz ha $x \in S$, akkor van olyan $y \in S$, amelyre $|x - y| = 1$)?
Megjegyzés: A feladat (a) részénél az elemek szorzatát az üres halmaz esetén tekintsük 0-nak, az egy elemű $\{x\}$ részhalmaz esetén pedig x-nek. A feladat (b) részénél a megfelelő részhalmazok között meg kell számolnunk az üres halmazt és magát a H halmazt is.

Megoldás: (a) A 30-cal való oszthatóság pontosan akkor teljesül, ha az elemek szorzata osztható 2-vel, 3-mal és 5-tel. 1 pont

Legyen H összes részhalmazának halmaza G. Legyen A azon részhalmazok halmaza, amelyekben az elemek szorzata 2-vel nem osztható. Legyen B azon részhalmazok halmaza, amelyekben az elemek szorzata 3-mal nem osztható. Legyen C azon részhalmazok halmaza, amelyekben az elemek szorzata 5-tel nem osztható. Feladatunk ekkor a $G \setminus (A \cup B \cup C)$ elemszámának meghatározása. Ez a logikai szita formula alapján

$$|G| - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|. \qquad \text{1 pont}$$

Ekkor $|A| = 2^5 - 1$, hiszen minden páratlan szám vagy szerepel, vagy nem, viszont az üres halmazt ki kell vennünk, hiszen a feladat szövege szerint abban az elemek szorzatát 0-nak tekintjük, a 0 pedig osztható 2-vel. Hasonló módon kapjuk, hogy $|B| = 2^7 - 1$ és $|C| = 2^8 - 1$. Az $|A \cap B| = 2^3 - 1$, mivel a páratlan számok közül a hárommal nem oszthatók, azaz az 1, 5, 7 számok lehetnek elemek. Hasonlóan $|A \cap C| = 2^4 - 1$ és $|B \cap C| = 25 - 1$. Végül $|A \cap B \cap C| = 2^2 - 1$, hiszen az ilyen halmazokban csak az 1 és 7 szerepelhet. A logikai szita formulából adódik, hogy a keresett szám:

$$2^{10} - (2^5 - 1) - (2^7 - 1) - (2^8 - 1) + (2^3 - 1) + (2^4 - 1) + (2^5 - 1) - (2^2 - 1) = 661. \qquad \text{1 pont}$$

(b) Amennyiben $H = \{1, 2, ..., n\}$, akkor legyen az adott tulajdonságú részhalmazok száma $s(n)$. Ha H az üres halmaz, akkor ennek egy megfelelő részhalmaza van, legyen ezért $s(0) = 1$. Nyilván $n = 1$ esetén sincs más, ezért $s(1) = 1$. $n = 2$ esetén két jó részhalmaz van az üres és az $\{1, 2\}$, így $s(2) = 2$. $n = 3$ esetén $s(3) = 4$ (üres, $\{1, 2\}$, $\{2, 3\}$, $\{1, 2, 3\}$). 1 pont

$n > 3$ esetén a megfelelő részhalmazokat számoljuk meg a szerint, hogy mi a legkisebb elem, ami nem szerepel benne. Ha ez az 1, akkor a $\{2, 3, ..., n\}$ halmaz megfelelő részhalmazait kell tekintenünk, ezek száma pedig $s(n-1)$. A 2 nem lehet a legkisebb kimaradó szám, hiszen ekkor az 1-nek nem szerepel szomszédja a részhalmazban. Ha a 3 a legkisebb kimaradó, akkor az 1 és 2 szerepel, a 3 nem szerepel, a többi $n-3$ számból pedig $s(n-3)$ féle megfelelő részhalmazt választhatunk. Így haladva tovább elérkezünk ahhoz, amikor a legkisebb kimaradó az $n-1$, ilyenből $s(1)$ darab van, majd amikor a legkisebb kimaradó az n, ilyenből $s(0)$ darab van. Végül még hozzá kell adni 1-et, amikor az összes szám szerepel a részhalmazban. Így az $s(n)$ sorozatra kaptunk egy rekurzív formulát:

$$n > 3 \quad \text{esetén} \quad s(n) = s(n-1) + s(n-3) + s(n-2) + ... + s(0) + 1. \qquad \text{2 pont}$$

A formulából adódóan kiszámolhatjuk a következő értékeket:

$s(4) = 7$, $s(5) = 12$, $s(6) = 21$, $s(7) = 37$, $s(8) = 65$, $s(9) = 114$

és végül a feladatban feltett kérdésre válaszolva $s(10) = 200$. 1 pont

Megjegyzés: A kapott rekurziós összefüggésből adódik, hogy $n > 3$ esetén az $s(n)$ sorozat képzési szabálya így is felírható: $s(n) = 2s(n-1) - s(n-2) + s(n-3)$.

Összesen 7 pont