# Oktatási Hivatal

A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. Legyenek $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ pozitív egészek. Legyen továbbá $b_i = [a_i; a_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n-1)$, ahol $[a_i; a_{i+1}]$ az $a_i$ és $a_{i+1}$ számok legkisebb közös többszörösét jelöli.
(a) Lehetséges-e, hogy $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$?
(b) Lehetséges-e, hogy $b_1 = b_2 = b_3 = \ldots = b_{99} = b_{100}$?
(c) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \ldots + \frac{1}{b_{n-1}} < 1.$$

2. Az $ABC$ háromszög beírt körét jelölje $k$, ennek középpontja legyen $I$. $k$-nak $BC$-vel párhuzamos érintője rendre $D$-ben és $E$-ben metszi az $AB$ és $AC$ oldalakat.

Bizonyítsuk be, hogy a $DEI$ háromszög területe az $ABC$ háromszög területének legfeljebb $\frac{1}{8}$ része.

3. Aladár kiszínezett egy $9 \times 9$-es táblán valahány mezőt. Barátja, Béla, nem látta a táblát, de Aladár elárulta neki a kiszínezett mezők $k$ számát. Mekkora lehet $k$ minimális értéke, ami esetén Béla biztos lehet benne, hogy van a táblán olyan $2\times 2$-es blokk, amelyből Aladár legalább 3 mezőt kiszínezett?

Valamennyi feladat 7 pontot ér.