A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

Javítási–értékelési útmutató

1. Legyenek $a_1 < a_2 < ... < a_n$ pozitív egészek. Legyen továbbá $b_i = [a_i; a_{i+1}]$ $(i = 1, 2, ..., n-1)$, ahol $[a_i; a_{i+1}]$ az a_i és a_{i+1} számok legkisebb közös többszörösét jelöli.
(a) Lehetséges-e, hogy $b_1 > b_2 > b_3 > b_4$?
(b) Lehetséges-e, hogy $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_{99} = b_{100}$?
(c) Bizonyítsuk be, hogy

$$\frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + ... + \frac{1}{b_{n-1}} < 1.$$

Megoldás: (a) Lehetséges, például $a_1 = 11$, $a_2 = 16$, $a_3 = 18$, $a_4 = 24$, $a_5 = 48$ esetén $b_1 = 176$, $b_2 = 144$, $b_3 = 72$ és $b_4 = 48$. 1 pont

(b) Ez is lehetséges. Legyenek $p_1 < p_2 < ... < p_{101}$ pozitív prímek, szorzatukat jelölje P. Legyen $a_1 = \frac{P}{p_{101}}$, $a_2 = \frac{P}{p_{100}}$, $a_3 = \frac{P}{p_{99}}$, ..., $a_{100} = \frac{P}{p_2}$ és $a_{101} = \frac{P}{p_1}$. Ekkor $b_1 = b_2 = b_3 = ... = b_{99} = b_{100} = P$. 2 pont

(c) Használjuk fel, hogy tetszőleges $u < v$ pozitív egészekre $u \cdot v = (u; v) \cdot [u; v]$ 1 pont
továbbá $(u; v)|(v - u)$ miatt $(u; v) \le v - u$. 1 pont

Ezek segítségével:

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+...+\frac{1}{b_{n-1}} = \frac{(a_1; a_2)}{a_1a_2}+\frac{(a_2; a_3)}{a_2a_3}+...+\frac{(a_{n-1}; a_n)}{a_{n-1}a_n} \le \frac{a_2 - a_1}{a_1a_2}+\frac{a_3 - a_2}{a_2a_3}+...+\frac{a_n - a_{n-1}}{a_{n-1}a_n} =$$

$$= \left(\frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_2}\right) + \left(\frac{1}{a_2} - \frac{1}{a_3}\right) + ... + \left(\frac{1}{a_{n-1}} - \frac{1}{a_n}\right) = \frac{1}{a_1} - \frac{1}{a_n} < \frac{1}{a_1} \le 1.$$ 2 pont

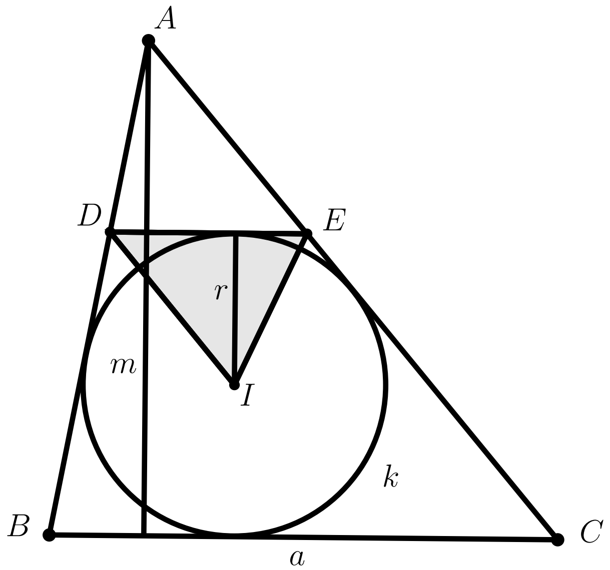
Összesen 7 pont

2. Az ABC háromszög beírt körét jelölje k, ennek középpontja legyen I. k-nak BC-vel párhuzamos érintője rendre D es E-ben metszi az AB és AC oldalakat.

Bizonyítsuk be, hogy a DEI háromszög területe az ABC háromszög területének legfeljebb $\frac{1}{8}$ része.

Megoldás: Legyen a beírt kör sugara r, az ABC kerületének fele s. Ekkor a DEI háromszög területe $(ED \cdot r)/2$, az ABC háromszög területe rs, így a bizonyítandó egyenlőtlenség

$$\frac{ED \cdot r}{2} \leq \frac{1}{8} rs, \quad \text{azaz} \quad ED \leq \frac{s}{4}. \qquad 1 \text{ pont}$$



Az ADE és ABC háromszögek hasonlók, hiszen oldalaik párhuzamosak. Az ABC háromszög A-ból induló magasságát m-mel jelölve a hasonlóság aránya

$$ED : a = (m - 2r) : m = 1 - \frac{2r}{m}. \qquad 2 \text{ pont}$$

Az ABC területét kétféleképpen felírjuk: $\frac{am}{2} = rs$, ebből $\frac{2r}{m} = \frac{a}{s}$ adódik. Ezt írjuk be az imént kapott összefüggésbe:

$$ED : a = 1 - \frac{a}{s}, \quad \text{amiből} \quad ED = a - \frac{a^2}{s}. \qquad 1 \text{ pont}$$

Ha s értékét rögzítjük, akkor ED-t a másodfokú kifejezéseként sikerült felírni. Most ED maximumának meghatározásához alakítsunk teljes négyzetté:

$$ED = a - \frac{a^2}{s} = -\frac{1}{s}\left(a^2 - sa\right) = -\frac{1}{s}\left(a - \frac{s}{2}\right)^2 + \frac{s}{4}. \qquad 2 \text{ pont}$$

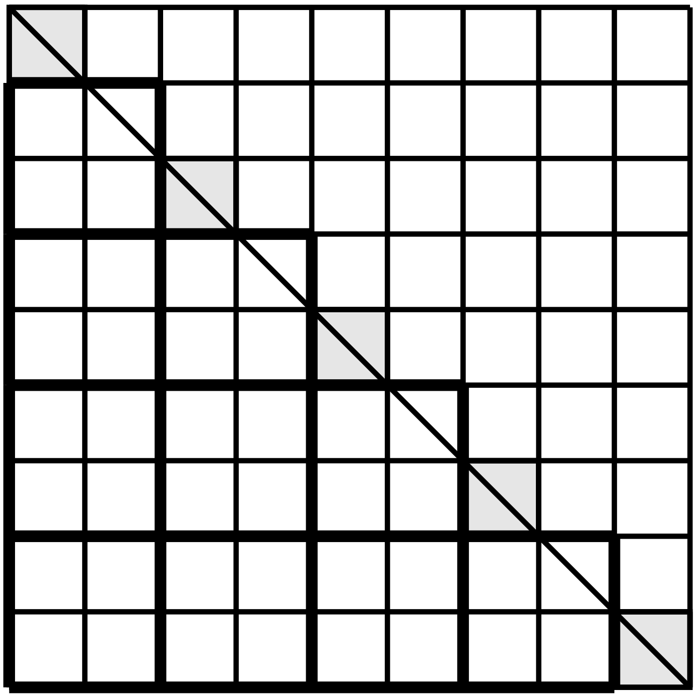
Ebből megkaptuk, hogy valóban $ED \leq \dfrac{s}{4}$, és az is kiderült, hogy egyenlőség pontosan akkor teljesül, amikor a éppen s fele, azaz a háromszög kerületének negyede. 1 pont

Összesen 7 pont

3. Aladár kiszínezett egy 9×9-es táblán valahány mezőt. Barátja, Béla, nem látta a táblát, de Aladár elárulta neki a kiszínezett mezők k számát. Mekkora lehet k minimális értéke, ami esetén Béla biztos lehet benne, hogy van a táblán olyan $2{\times}2$-es blokk, amelyből Aladár legalább 3 mezőt kiszínezett?

Megoldás: Először megmutatjuk, hogy $k > 45$. Ha Aladár a páratlan sorszámú sorok minden mezőjét kiszínezi, akkor minden blokkban pontosan kettő színezett mező lesz. Ekkor a táblán $5 \cdot 9 = 45$ színezett mező van. 1 pont

Most belátjuk, hogy $k = 46$ mező esetén biztosan van 3 színezett mezőt tartalmazó 2×2-es blokk. Rajzoljuk be az alábbi ábrán látható módon azt a 10 darab 2×2-es diszjunkt blokkot, amelyek a főátló alatti mezőket mind lefedik. Tükrözzük ezt a 10 blokkot a főátlóra. Így összesen van 20 blokkunk. Ezek uniója minden mezőt fed, kivéve a főátlón levő mezők közül 5-öt, ezeket az ábrán szürkével jelöltük. 3 pont



A 46 színezett mezőből legfeljebb 5 lehet a főátlón szürkével jelölt. Tehát a megmaradó, legalább 41 színezett mező a 20 blokk által fedett részen van. A skatulya elv miatt ezért lesz a 20 blokk közt olyan, amely legalább három színezettet tartalmaz. 2 pont

Nyilván amennyiben $k > 46$, akkor is lesz 3 színezett mezőt tartalmazó 2×2-es blokk. A feladatban feltett kérdésre tehát a válasz a $k = 46$. 1 pont

Összesen 7 pont