



A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATOK

1. Az $ABCD$ húrnégyszög BC és CD oldalai egyenlők. Legyen E a B pont középpontos tükörképe C -re. Mutassuk meg, hogy az átlók metszéspontjának a BC egyenesre vonatkozó tükörképe az ABE háromszög körülírt körére esik.
2. Legyen f egész együtthatós polinom, $k \geq 2$ egész, és p prímszám. Tegyük fel, hogy az $f(0), f(1), \dots, f(p-1)$ számok p -vel osztva k különböző maradékot adnak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f foka legalább $(p-1)/(k-1)$.
3. Adott 7 darab vektor a térben úgy, hogy semelyik három nincs egy síkban. Mutassuk meg, hogy ha bármely két különbözőt skalárisan összeszorozunk, akkor legalább háromféle számot kapunk.