A 2018/2019. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

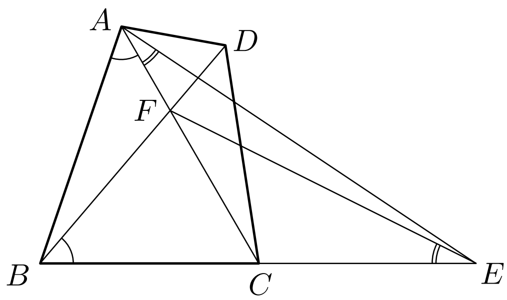
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Megoldások

1. feladat

Az $ABCD$ húrnégyszög BC és CD oldalai egyenlők. Legyen E a B pont középpontos tükörképe C-re. Mutassuk meg, hogy az átlók metszéspontjának a BC egyenesre vonatkozó tükörképe az ABE háromszög körülírt körére esik.

Megoldás: Az átlók F metszéspontja az ABE háromszög egyik súlyvonalának belső pontja, és így magának az ABE háromszögnek is belső pontja. Ezért ahhoz, hogy F-nek a BE oldalegyenesre vonatkozó tükörképe a körülírt körre kerüljön, a kerületi szögek tétele miatt elegendő, hogy a BAE szög és a BFE szög 180°-ra egészítse ki egymást.



Az ábrán egyvonalas ívvel jelölt BAF és CBF szögek egyenlők (a közös értékük legyen φ), mert az $ABCD$ négyszög körülírt körében egyenlő ívekhez tartozó kerületi szögek. Elég tehát belátni, hogy a kétvonalas ívekkel jelölt EAC és CEF szögek is egyenlők (a közös értéküket jelölje ψ), hiszen akkor $BAE\sphericalangle = \varphi + \psi$, és a BEF háromszögből $BFE\sphericalangle =$ $= 180° - (\varphi + \psi)$.

Az ABC háromszög és a BFC háromszög hasonló, mert a C-beli szögük közös, és az A-nál, illetve B-nél levő szögük is egyenlő. Innen $AC : BC = BC : FC$, azaz $BC = EC$ miatt $AC : EC = EC : FC$ következik. Az ACE háromszögben és az ECF háromszögben a C csúcsnál levő közös szöget közrefogó oldalak aránya tehát egyenlő, és a két háromszög hasonló. Így $EAC\sphericalangle = CEF\sphericalangle$, amit bizonyítani akartunk.

2. feladat

Legyen f egész együtthatós polinom, $k \geq 2$ egész, és p prímszám. Tegyük fel, hogy az $f(0), f(1), \ldots, f(p-1)$ számok p-vel osztva k különböző maradékot adnak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor f foka legalább $(p-1)/(k-1)$.

Megoldás: Tekintsük először a feladat $k = 2$-re vonatkozó speciális esetét: tegyük föl, hogy az $f(0)$, $f(1)$, $\ldots$, $f(p-1)$ számok p szerint pontosan két maradékosztályhoz tartoznak, és azt kell belátnunk, hogy f foka legalább $p-1$. Az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy a két maradékosztály egyike a 0, hiszen tetszés szerint módosíthatjuk f konstans tagját. A p-vel nem osztható f-értékek p szerinti maradékát jelöljük d-vel.

A $0 \leq x \leq p-1$ egészek közül legyenek a_1, a_2, $\ldots$, a_m azok, amelyekre $f(x)$ maradéka d-vel egyenlő modulo p. Ekkor tehát $0 < m < p$, és az a_i-ktől különböző 0 és $p-1$ közötti x egész számokra $p \mid f(x)$ érvényes.

A kis-Fermat-tétel alapján a $0 \leq x \leq p-1$ egészekre az $(x-a_i)^{p-1}$ hatvány 1 maradékot ad p-vel osztva, ha $x \neq a_i$, és persze 0, ha $x = a_i$. Ezért az

$$\bigl(1-(x-a_1)^{p-1}\bigr) + \bigl(1-(x-a_2)^{p-1}\bigr) + \ldots + \bigl(1-(x-a_m)^{p-1}\bigr)$$

összegben ha $x = a_i$, egyedül az i-edik tag ad 1 maradékot modulo p, és az összes többi tag p-vel osztható, ha pedig x az a_i-k mindegyikétől különböző egész szám 0 és $p-1$ között, akkor mindegyik tag p-vel osztható. Tekintsük a

$$g(x) = d\sum_{i=1}^{m}\bigl(1-(x-a_i)^{p-1}\bigr)$$

egész együtthatós $(p-1)$-edfokú polinomot. Az előzőek alapján minden $0 \leq x \leq p-1$ egész szám esetében $g(x)$-nek ugyanannyi a p szerinti maradéka, mint $f(x)$-nek. Nyilván ekkor ugyanez igaz minden x egész számra is.

A $h = f - g$ polinomnak így minden egész helyen vett helyettesítési értéke p-vel osztható. A következő, egész együtthatós polinomokra vonatkozó segédtételt alkalmazzuk:

> *Ha egy a p prímszámnál alacsonyabb fokú egész együtthatós polinomnak minden egész számnál vett helyettesítési értéke osztható p-vel, akkor a polinom mindegyik együtthatója osztható p-vel.*
>
> A segédtételt élesebb formában kimondva lehet könnyen bebizonyítani: ha a polinom foka n, ahol $n < p$, és legalább $n+1$ különböző p szerinti maradékosztályhoz tartozó egész szám behelyettesítésekor kapunk p-vel osztható értéket, akkor az összes együttható osztható p-vel. A bizonyítás n szerinti teljes indukcióval történhet. Az indukciós lépésben maradékosan osztunk az $(x-a)$ polinommal, ahol a a szóban forgó maradékosztályok egyikéhez tartozik. Ekkor a maradék p-vel osztható, és az indukciós feltevést a hányadosra alkalmazzuk.

A g polinom $(p-1)$-edfokú, és a főegyütthatója $-md$, ami nem osztható p-vel. Ha f ennél alacsonyabb fokú volna, akkor h is $(p-1)$-edfokú volna ugyanazzal a főegyütthatóval, mint g, ami a segédtétel miatt lehetetlen. Tehát f foka valóban legalább $p-1$.

Rátérünk a feladat általános esetére. Legyenek az f polinom $0, 1, \ldots, p-1$ helyeken felvett értékeinek modulo p páronként különböző maradékai a $c_1, c_2, \ldots, c_k$ számok, és tekintsük az

$$F(x) = \big(f(x) - c_2\big) \ldots \big(f(x) - c_k\big)$$

egész együtthatós polinomot. Nyilván F foka az f fokának $(k-1)$-szerese, tehát azt kell belátnunk, hogy F foka legalább $p-1$.

Legyen $0 \le x \le p-1$ tetszőleges egész. Ha $f(x)$ értéke c_1 modulo p, akkor $F(x)$-nek és $(c_1 - c_2) \ldots (c_1 - c_k)$-nak ugyanannyi a p szerinti maradéka, és az utóbbi nyilván nem osztható p-vel. Ha pedig $f(x)$ maradéka p szerint valamelyik másik c_j-vel egyenlő, akkor viszont $p \mid F(x)$. Tehát az F polinomra teljesülnek a feladat feltételei $k = 2$-vel, így a korábban bizonyítottak szerint F foka valóban legalább $p-1$.

Megjegyzések: (1) A megoldás első részében az $1-(x-a)^{p-1}$ polinom helyett használhattuk volna a $\prod_{j \ne a}(x-j)$ polinomot is, ami $(x^p - x)/(x-a)$-val egyenlő modulo p. Ennek is gyöke mindegyik $a \ne j$, és Wilson tétele miatt az a-nál felvett értéke -1 modulo p.

(2) A megoldásban felhasznált segédtétel „a polinomok azonossági tétele” a modulo p maradékosztályok teste feletti polinomok körében. Bizonyítása (valamivel általánosabb formában) megtalálható például Kiss Emil Bevezetés az algebrába című tankönyvének 2.4. szakaszában.

3. feladat

Adott 7 darab vektor a térben úgy, hogy semelyik három nincs egy síkban. Mutassuk meg, hogy ha bármely két különbözőt skalárisan összeszorzunk, akkor legalább háromféle számot kapunk.

Első megoldás: Tegyük föl indirekt módon, hogy léteznek ilyen vektorok, amelyek közül a különbözők skaláris szorzatai az s és t lehetséges értékek közül kerülnek ki. Készítsük el azt a G gráfot, melynek csúcsai ezek a vektorok, és két csúcs akkor van éllel összekötve, ha a két megfelelő vektor skaláris szorzata s. Jelölje A a G csúcsainak halmazát, B pedig a csúcsokból képzett párok (kételemű részhalmazok) halmazát, tehát B elemszáma 21. Készítsünk egy másik P (ezúttal páros) gráfot is a következőképpen: csúcsai $A \cup B$, és egy $\mathbf{a} \in A$ csúcsot akkor kötünk össze egy $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} \in B$ párral, ha az $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ és $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ skaláris szorzatok egyenlők. Ilyenkor $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} - \mathbf{c}) = 0$, azaz $\mathbf{a}$ merőleges $(\mathbf{b} - \mathbf{c})$-re.

Megmutatjuk, hogy P-nek több, mint 42 éle van. Valóban, ha $\mathbf{a} \in A$, és $\mathbf{a}$ foka a G gráfban k, akkor $\mathbf{a}$-ból P-ben

$$\binom{k}{2} + \binom{6-k}{2}$$

él indul, hiszen $\mathbf{a}$ akkor van összekötve P-ben $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\}$-vel, ha $\mathbf{a}$-ból él vezet $\mathbf{b}$-be is és $\mathbf{c}$-be is G-ben, vagy ha egyikbe sem. A fenti kifejezés értékét $k = 0, \ldots, 6$ esetén kiszámítva rendre a 15, 10, 7, 6, 7, 10, 15 számokat kapjuk. Ezért A minden eleméből legalább 6 él indul P-ben. Ez összesen 42 él. De itt egyenlőség nem lehetséges, mert ha A minden eleméből 6 él indul P-ben, akkor G minden csúcsának a foka 3. Ez lehetetlen, mert akkor G-ben a fokszámok összege 21, ami páratlan szám, holott G élei számának kétszerese.

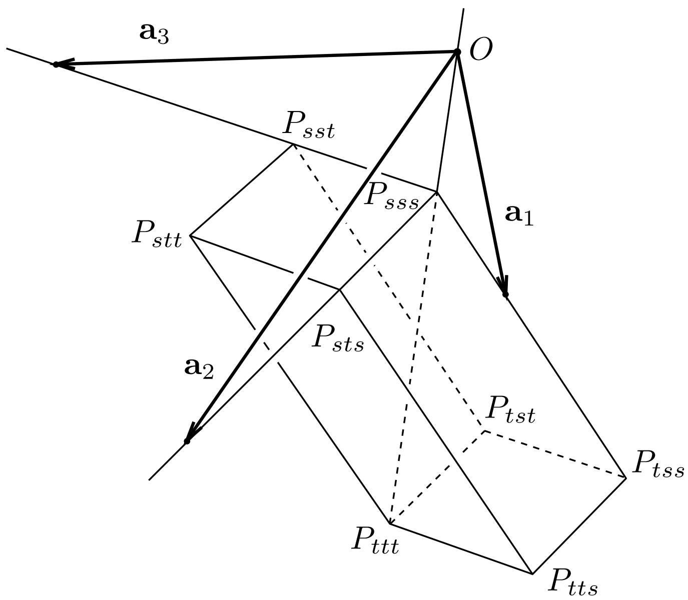
Tehát P-nek több, mint 42 éle van, és mivel B elemszáma 21, van B-ben legalább harmadfokú pont. Azaz van olyan $\{\mathbf{b}, \mathbf{c}\} \in B$, amely össze van kötve P-ben három különböző $\mathbf{d}, \mathbf{e}, \mathbf{f} \in A$ csúccsal. Ezért $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ merőleges $\mathbf{d}$, $\mathbf{e}$, $\mathbf{f}$ mindegyikére. De ez három nem egysíkú vektor, és ezért mindháromra csak a nullvektor lehet merőleges. Ezért $\mathbf{b} = \mathbf{c}$, ami ellentmondás.

Második megoldás: Indirekt módon tegyük fel, hogy a hét adott vektor közül semelyik három nincs közös síkban, és a belőlük képzett skaláris szorzatok csak kétféle értéket vesznek fel. A zérusvektor nyilván nem szerepelhet közöttük, hiszen bármelyik két másikkal egysíkú volna. Vegyük föl a hét vektort egy közös O kezdőpontból kiindulva.

A hét vektor között van három olyan, amelyeknek páronként ugyanannyi a skaláris szorzata, hiszen ha egy hétcsúcsú gráf éleit akárhogyan színezzük kétféle színnel, könnyen látható, hogy biztosan keletkezik egyszínű háromszög. (Már hatcsúcsú gráfok esetében is ez így van, ez az ún. Ramsey-tétel egyik közismert esete.) Legyen $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ három ilyen vektor, az $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_2\mathbf{a}_3$, $\mathbf{a}_3\mathbf{a}_1$ skaláris szorzatok közös értéke legyen s, a másik skaláris szorzat pedig t.

Ha $s = 0$, akkor $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ páronként merőlegesek. Az általuk páronként kifeszített síkokban nem feküdhet a további vektorok egyike sem, ezért azoknak $\mathbf{a}_1$-gyel, $\mathbf{a}_2$-vel és $\mathbf{a}_3$-mal t skaláris szorzatot kell adniuk. Ezzel ellentmondáshoz jutottunk, mert a tér bármely vektorát egyértelműen meghatározza az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$-mal vett három skaláris szorzatának az értéke. A továbbiakban feltehetjük tehát, hogy $s \neq 0$.

A többi négy vektor végpontjai mindannyian illeszkednek két $\mathbf{a}_1$-re merőleges sík, két $\mathbf{a}_2$-re merőleges sík, illetve két $\mathbf{a}_3$-ra merőleges sík valamelyikére. Mivel az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ és $\mathbf{a}_3$ vektorok nem egysíkúak, e három síkpár közös része nem tartalmazhat teljes metszésvonalat. A négy további végpont tehát csak egy parallelepipedon nyolc csúcsa közül kerülhet ki. Az ábrán ezeket P_{sss}, P_{sst}, $\ldots$, P_{ttt} jelöli. Az i-edik index ($i = 1, 2, 3$) aszerint s vagy t, hogy az $\mathbf{a}_i$-vel vett skaláris szorzat értéke s, illetve t.



Ekkor az $\mathbf{a}_1$ vektor végpontja rajta van a $P_{sss}P_{tss}$ egyenesen, hiszen $\mathbf{a}_1\mathbf{a}_2 = \mathbf{a}_1\mathbf{a}_3 = s$. Ugyanígy az $\mathbf{a}_2$ vektor végpontja a $P_{sss}P_{sts}$ egyenesre, az $\mathbf{a}_3$ vektor végpontja a $P_{sss}P_{sst}$ egyenesre illeszkedik.

Azt állítjuk, hogy az O pont rajta van a parallelepipedon $P_{sss}P_{ttt}$ átlóegyenesén. Ez nyilvánvaló akkor, ha $t = 0$, hiszen ekkor $O = P_{ttt}$. Ha pedig $t \neq 0$, akkor a tér bármely nemzérus vektorát választva, a vele s skaláris szorzatot adó vektorok végpontjai alkotta síkot O középpontú, t/s arányú nagyítás viszi a t skaláris szorzatot adó vektorok végpontjai alkotta síkba. Emiatt a parallelepipedon $P_{stt}P_{ttt}$, $P_{tst}P_{ttt}$, $P_{tts}P_{ttt}$ élegyenesei rendre ezzel a nagyítással állnak elő a $P_{sss}P_{tss}$, a $P_{sss}P_{sts}$, illetve a $P_{sss}P_{sst}$ egyenesekből. Ezeknek a nagyítással egymásnak megfeleltetett párhuzamos élpároknak a síkjaiban tehát benne van az O origó. Ennek a három síknak, amelyek átlósíkok a parallelepipedonban, a $P_{sss}P_{ttt}$ egyenes a közös metszésvonala, tehát O illeszkedik erre az egyenesre.

Emiatt az $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{a}_3$ vektorok közül is egy-egy ezekben az átlósíkokban fekszik. Így, mivel az adott vektorok közül nincs három egy síkban, e három átlósík mindegyikében legfeljebb egy feküdhet a további négy adott vektor közül. A P_{sss} és P_{ttt} pontokba, amelyek mindhárom szóban forgó átlósíkra illeszkednek, a további vektorok egyike sem mutathat, hiszen az kizárná az összes többi csúcsot.

Maradnak a P_{sst}, P_{tts}, P_{sts}, P_{tst}, P_{tss}, P_{stt} pontok: a további négy vektor végpontjai már csak ezek közül kerülhetnek ki. Ezek a parallelepiedon három testátlójának a végpontjai. Kell hogy legyen tehát olyan testátló, amelynek mindkét végpontja szerepel, viszont akkor az az (origóra illeszkedő) átlósík, amelyikben ez a testátló fekszik, hármat is tartalmaz az adott vektorok közül. Ellentmondásra jutottunk, tehát nem létezik hét vektor a feltett tulajdonságokkal.

Megjegyzések: (1) Lehet úgy megadni hat darab, hármanként nem egysíkú vektort, hogy a különbözők skaláris szorzatai csak kétféle értéket vehessenek föl, például egy szabályos ikozaéder középpontjából a csúcsokba mutató vektorok közül ki lehet így választani hatot.

(2) A feladat állításából következik, hogy a térben nincs hét olyan, páronként nem párhuzamos egyenes, hogy bármely kettőnek a szöge ugyanaz.

(3) Könnyű belátni, hogy ha csak egyféle skaláris szorzatot engedünk meg a különböző vektorok között, akkor maximálisan négy ilyen vektor létezik.