Oktatási Hivatal

A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. A k_1, k_2, k_3 köröknek páronként két metszéspontja van. Bármelyik két kört tekintve, metszéspontjaik közül az egyik a harmadik belsejében, a másik azon kívül van.

(a) Mekkora a körök által kétszeresen fedett terület, ha a körök területeinek összege $3\,\mathrm{cm}^2$, az általuk összesen lefedett terület $2\,\mathrm{cm}^2$ és a háromszorosan lefedett terület pedig $0,2\,\mathrm{cm}^2$?

(b) A legalább kétszeresen lefedett terület egy síkidom, melyet 6 ív határol. Ezt a hat ívet felváltva pirossal és zölddel színezzük. Igazoljuk, hogy amennyiben a körök sugarai ugyanakkorák, akkor a piros ívek hosszának összege ugyanannyi, mint a zöldeké.

Megoldás: (a) Jelölje az egyszeresen, kétszeresen és háromszorosan fedett terület mérőszámát cm^2-ben rendre x, y és $z = 0,2$. Mivel a körök területeinek összege 3 cm^2, ezért

$$x + 2y + 3z = x + 2y + 0,6 = 3. \qquad \text{1 pont}$$

A körök által lefedett összterület 2 cm^2, ezért

$$x + y + z = x + y + 0,2 = 2. \qquad \text{1 pont}$$

A második egyenletből $x+y = 1,8$, ezt beírva az első egyenletbe $1,8+y+0,6 = 3$, amiből $y = 0,6$ adódik. Tehát a körök által kétszeresen fedett terület 0,6 cm^2. 1 pont

(b) Jelölje a k_i körön a piros és zöld ív hosszát p_i és z_i, továbbá a háromszorosan fedett területet határoló ív hosszát f_i $(i = 1, 2, 3)$. Használjuk ki, hogy a körök egyenlő sugarúak. Bármely kettőt tekintve ugyanakkora ívet tartalmaznak egymásból. Ezt írjuk fel először k_1 és k_2 körökre:

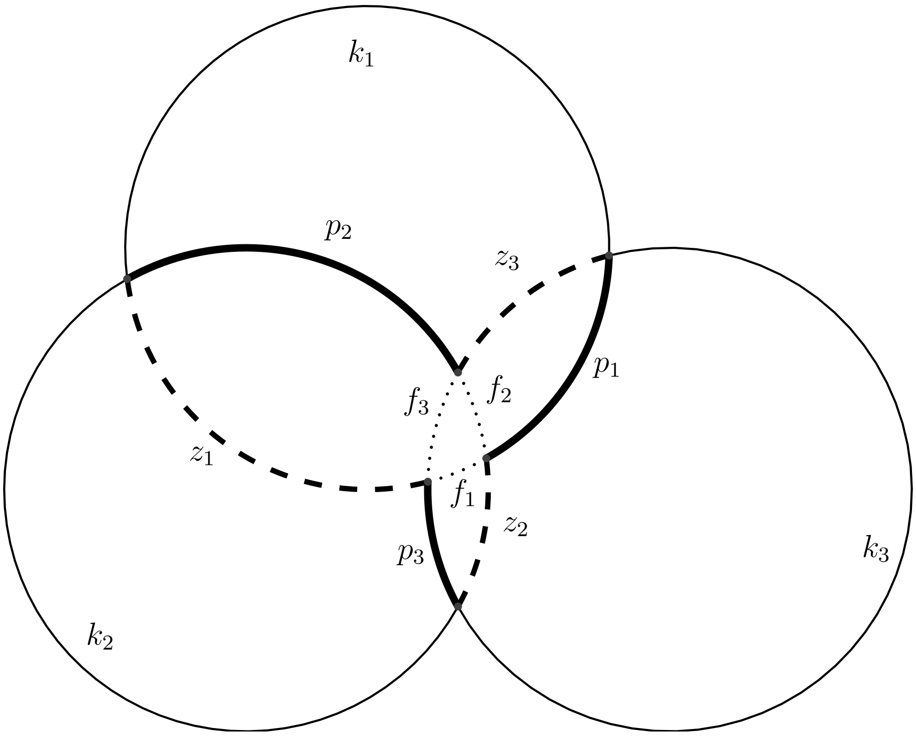
$$z_1 + f_1 = p_2 + f_2. \qquad \text{2 pont}$$

Hasonlóan a másik két körpárt tekintve kapjuk, hogy $z_2+f_2 = p_3+f_3$ és $z_3+f_3 = p_1+f_1$. A három egyenlet megfelelő oldalait összeadva

$$z_1 + f_1 + z_2 + f_2 + z_3 + f_3 = p_2 + f_2 + p_3 + f_3 + p_1 + f_1.$$

Mindkét oldalból kivonva $f_1 + f_2 + f_3$-at megkapjuk a bizonyítandó állítást. 2 pont

Összesen 7 pont



2. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$2 \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 10} + x - 2 \cdot \sqrt{x-2} = 3.$$

Megoldás: Az első gyökjel alatti másodfokú kifezejezésben alakítsunk ki teljes négyzetet:

$$\sqrt{x^2 - 6x + 10} = \sqrt{(x-3)^2 + 1}. \qquad \text{1 pont}$$

Ebből következik, hogy az első gyökjel alatt minden valós x esetén pozitív szám áll, így értelmezve van. A második gyökjel értelmezett, ha $x \geq 2$. 1 pont

Az egyenlet mindkét oldalából kivonunk 1-et, a bal oldalon csoportosítunk, így kialakul egy másik kifejezés négyzete:

$$2 \cdot \sqrt{x^2 - 6x + 10} + x - 2 \cdot \sqrt{x-2} - 1 = 2 \cdot \sqrt{(x-3)^2 + 1} + (x-2) - 2 \cdot \sqrt{x-2} + 1 =$$

$$= 2 \cdot \sqrt{(x-3)^2 + 1} + \left(\sqrt{x-2} - 1\right)^2 = 2. \qquad \text{2 pont}$$

A bal oldalon $2 \cdot \sqrt{(x-3)^2 + 1} \geq 2$, egyenlőséget csak $x = 3$ esetén kapunk. 1 pont

Továbbá $(\sqrt{x-2} - 1)^2 \geq 0$, ahol egyenlőséget csak akkor kapunk, ha $\sqrt{x-2} = 1$, azaz $x = 3$. 1 pont

Egyenletünket tekintve a bal oldal legalább 2, a jobb oldal értéke éppen 2. Egyenlőség akkor és csak akkor teljesül, ha $x = 3$, ami benne van az értelmezési tartományban. Ellenőrzés után láthatjuk, hogy ez valóban jó megoldás. 1 pont

Összesen 7 pont

Megjegyzés: 1 pontot kap a versenyző abban az esetben, ha csupán észreveszi, hogy az $x = 3$ az egyenlet gyöke, de nem vezeti le, hogy nincs más megoldás. Amennyiben ismételt négyzetre emelésekkel megszabadul a gyökjelektől és így negyedfokú egyenlethez jut, erre az átalakításra 2 pontot kaphat.

3. Hány olyan pozitív egész szám van, amelyből egyetlen számjegy törlése után a kapott számjegyek összege 19, szorzata pedig 9?

Megoldás: Vizsgáljuk meg, a számjegy letörlése után milyen jegyek maradhattak. Nyilván 0 nem maradhatott, csak egyesek és olyan számok, amiknek szorzataként előáll a 9. Az egyesek számát az határozza meg, hogy a jegyek összege a feladat feltétele szerint 19. Így két lehetőség maradt: (i) egy kilences és 10 darab egyes; (ii) két hármas és 13 darab egyes. 1 pont

Jelölje a letörölt jegyet j. (i) Ez a szám eredetileg 12 jegyű volt. Ha $j = 0$, akkor a 0 nem lehet az első jegy, így 11 helyen állhat, a 9-es pedig a maradék 11 helyre kerülhet, ilyen számokból 11^2 van. Ha $j = 1$, akkor a 9-es jegy 12 helyre kerülhet. Ha $j = 9$, akkor a két 9-es helyét $\binom{12}{2}$-féleképpen választhatjuk meg. Végül ha j eddig nem említett más számjegy, akkor j értéke 7-féle lehet, ez a jegy kerülhet 12 helyre, a 9-es pedig 11 helyre, ilyen számokból $7 \cdot 12 \cdot 11$ van. Összesen ebben az esetben a megfelelő számok száma:

$$11^2 + 12 + \binom{12}{2} + 7 \cdot 12 \cdot 11 = 1123. \qquad 3 \text{ pont}$$

(ii) Most az eredeti szám 16 jegyű. Az előbbiek mintájára a $j = 0$ esetén először kiválasztjuk a 0 helyét, majd a maradékokból a két 3-as helyét: $15 \cdot \binom{15}{2}$. Ha $j = 1$, akkor a két 3-as helye már meghatározza a számot, ilyenből $\binom{16}{2}$ van. Ha $j = 3$, akkor a három 3-as helyét kell kiválasztani, ezek száma $\binom{16}{3}$. Ha j más jegy, akkor értéke 7-féle lehet, ez a jegy kerülhet 16 helyre, majd a maradék helyekből kiválasztjuk, hova kerüljön a két 3-as: $7 \cdot 16 \cdot \binom{15}{2}$. Összesen ebben az esetben a megfelelő számok száma:

$$15 \cdot \binom{15}{2} + \binom{16}{2} + \binom{16}{3} + 7 \cdot 16 \cdot \binom{15}{2} = 14015.$$

A feladat feltételeinek eleget tevő számok száma 15138. 3 pont

Összesen 7 pont

4. Az $ABCD$ négyszög mind a négy csúcsa egy körön helyezkedik el. Tudjuk, hogy $DAB\sphericalangle = 135°$, továbbá az AC és BD átlók merőlegesek egymásra. Igazoljuk, hogy az átlók metszéspontja két olyan szakaszra osztja az AC átlót, amelyek hosszának a különbsége megegyezik a másik átló hosszával.

Megoldás: Legyen az $ABCD$ köré írt kör sugara R, ekkor BD hossza

$$BD = 2R \cdot \sin 135° = \sqrt{2} \cdot R,$$

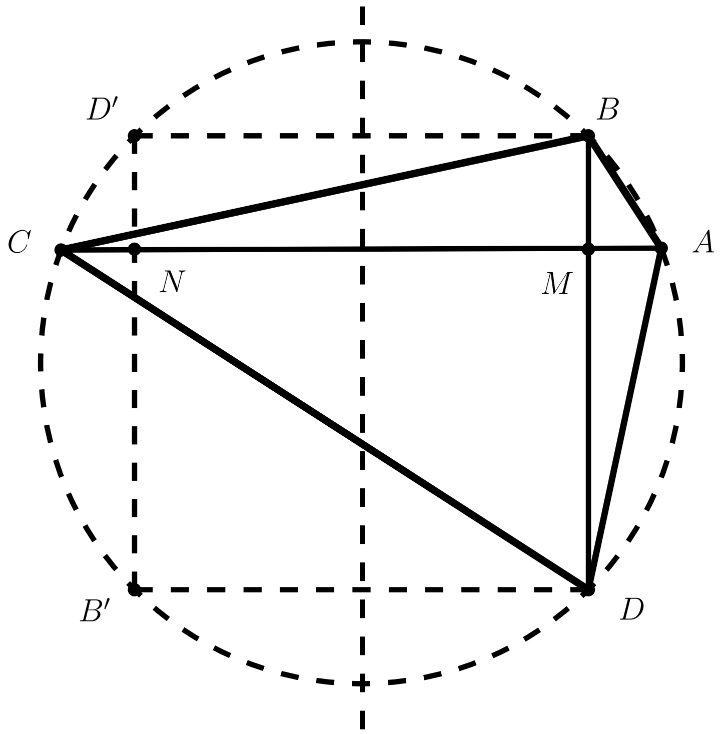
ami éppen az R sugarú körbe írható négyzet oldalának hossza. 2 pont

Tükrözzük BD-t a kör középpontjára, így kapjuk az alábbi ábra szerint a B' és D' pontokat, ahol $BD'B'D$ egy négyzet. Legyen BD és $B'D'$ metszéspontja az AC átlóval rendre M és N. Mivel AC merőleges DB-re, így ábránk szimmetrikus az AC felezőmerőlegesére. 3 pont

A bizonyítandó állítás ebből azonnal adódik, hiszen $CN = MA$ és $NM = BD$, amiből:

$$CM - MA = (CN + NM) - MA = BD. \qquad 2 \text{ pont}$$

Összesen 7 pont



5. Egy sakkversenyen kétszer annyi fiú vett részt, mint ahány lány. Bármely két játékos egy alkalommal játszott egymással és egyetlen játszma sem végződött döntetlennel. Hány lány és hány fiú vett részt a versenyen, ha tudjuk, hogy a lányok és a fiúk nyertes játszmáinak aránya 7:5?

Megoldás: Legyen a lányok száma n, ekkor a lányok egymással $\binom{n}{2}$, a fiúk egymással $\binom{2n}{2}$ mérkőzést játszottak. 1 pont

Lányok a fiúkkal $n \cdot 2n$ mérkőzést játszottak, ezek közül jelölje k azon mérkőzések számát, amelyekben lány győzött, így $k \leq 2n^2$. 1 pont

A feladat feltétele szerint

$$\frac{7}{5} = \frac{\frac{n(n-1)}{2} + k}{n(2n-1) + 2n^2 - k}.$$

A nevezőkkel szorozva, majd rendezve kapjuk: $8k = 17n^2 - 3n$. 1 pont

A $k \leq 2n^2$ feltételből $8k \leq 16n^2$, ezt vessük össze az iménti összefüggéssel:

$$8k = 17n^2 - 3n \leq 16n^2.$$ 1 pont

Az egyenlőtlenséget rendezve $n(n-3) \leq 0$, amiből n értéke 1, 2 vagy 3. 1 pont

Amennyiben $n = 1$ vagy $n = 2$, akkor a $8k = 17n^2 - 3n$ összefüggésből adódóan k értéke nem természetes szám. 1 pont

Ha $n = 3$, akkor $k = 18$ és teljesülnek a feladat feltételei. A versenyen 3 lány és 6 fiú vett részt. 1 pont

Összesen 7 pont