A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA

II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

Javítási–értékelési útmutató

1. Oldjuk meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:

$$3^{\frac{x^2-4}{4}} + 3^{\frac{4-x^2}{x^2}} = 2.$$

Megoldás: Tört nevezőjében nem állhat nulla, ezért $x \neq 0$. 1 pont
Az egyenlet mindkét oldalát 3-mal szorozva

$$3^{\frac{x^2}{4}} + 3^{\frac{4}{x^2}} = 6.$$ 1 pont

A 3 alapú exponenciális függvény értékkészletében pozitív számok vannak, így a bal oldalon álló két tagra alkalmazhatjuk a számtani és mértani közepek közötti egyenlőtlenséget. 1 pont

A két tag mértani közepe: $\sqrt{3^{\frac{x^2}{4}} \cdot 3^{\frac{4}{x^2}}} = \sqrt{3^{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}}}$.

Pozitív szám és reciprokának összege legalább 2, azaz $2 \leq \dfrac{x^2}{4} + \dfrac{4}{x^2}$. 1 pont

A hármas alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért

$$3 = \sqrt{3^2} \leq \sqrt{3^{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}}}.$$ 1 pont

Összegezve az eddigieket kapjuk, hogy

$$3 = \sqrt{3^2} \leq \sqrt{3^{\frac{x^2}{4}+\frac{4}{x^2}}} = \sqrt{3^{\frac{x^2}{4}} \cdot 3^{\frac{4}{x^2}}} \leq \frac{3^{\frac{x^2}{4}} + 3^{\frac{4}{x^2}}}{2} = 3.$$

Ez akkor és csak akkor teljesül, ha minden egyenlőtlenségnél éppen egyenlőség van, ami pontosan akkor teljesül, amikor $x^2 = 4$, ebből $x_1 = 2$ és $x_2 = -2$. 1 pont

A kapott gyököket behelyettesítve ellenőrizzük az eredményt, valóban mindkét megoldás helyes. 1 pont

Összesen 7 pont

2. Egy dobozban kezdetben egy piros és egy fehér golyó van. Véletlenszerűen kiveszünk egy golyót, majd visszatesszük és beteszünk még egy olyan színűt, amilyet legutóbb kivettünk. Ezt ismételgetjük, így minden vételnél eggyel több golyó közül húzunk. Mennyi a valószínűsége, hogy 100 vételből pontosan 50-szer húzunk pirosat?

Megoldás: Jelölje $P(n;k)$ annak a valószínűségét, hogy n vétel történt és ezek közül k alkalommal húztunk pirosat, azaz $P(100;50)$ értéke a kérdés. Megmutatjuk, hogy minden pozitív egész n esetén tetszőleges $k = 0, 1, .., n$ értékre

$$P(n;k) = \frac{1}{n+1}, \quad \text{így} \quad P(100;50) = \frac{1}{101}.$$ 1 pont

A bizonyítást teljes indukcióval végezzük. Mivel az állításban két paraméter van, ezért a kezdő lépés két részből áll.

(i) A kezdeti helyzetből indulva a piros és fehér golyó húzásának egyaránt $\frac{1}{2}$ a valószínűsége, így $P(1;0) = P(1;1) = \frac{1}{2}$. 1 pont

(ii) Tetszőleges pozitív egész n esetén annak a valószínűsége, hogy egyetlen pirosat sem húztunk, a következő gondolatmenettel határozható meg. Az első húzásnál $\frac{1}{2}$ valószínűséggel fehéret kaptunk. Ekkor egy újabb fehér kerül a dobozba, így a második vételnél $\frac{2}{3}$ valószínűséggel ismét fehéret kapunk. Egy újabb fehér kerül a dobozba így a harmadik vételnél $\frac{3}{4}$ valószínűséggel fehéret kapunk és így tovább egészen az utolsó vételig, amikor $\frac{n}{n+1}$ a valószínűség. Ebből

$$P(n;0) = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot ... \cdot \frac{n}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$

Logikai szimmetria miatt annak a valószínűsége, hogy minden vételnél pirosat kapunk ugyanannyi, mint hogy minden vételnél fehéret, így

$$P(n;0) = P(n;n) = \frac{1}{n+1}.$$ 1 pont

Az indukciós lépésben $1 < n$ és $0 < k < n$ esetén feltételezzük, hogy $P(n-1;k-1) = \frac{1}{n}$ és $P(n-1;k) = \frac{1}{n}$. Ezek felhasználásával megmutatjuk, hogy $P(n;k) = \frac{1}{n+1}$. 1 pont

A kezdő lépésben (i) és (ii) esetek vizsgálata azért történt, hogy elegendő legyen az $1 < n$ és $0 < k < n$ feltételeknek megfelelő $P(n;k)$ értékek meghatározása. Ehhez nézzük az utolsó vételt.

Ha ez piros, akkor az utolsó vétel előtti állapotig már $k-1$-szer húztunk pirosat, így $P(n-1;k-1)$ valószínűséggel jutottunk ide. A dobozban az $n+1$ golyó közül k piros van, így az n. vételnél a piros húzásának valószínűsége $\frac{k}{n+1}$. 1 pont

Ha fehér, akkor az utolsó vétel előtti állapotig már k-szor húztunk pirosat, így $P(n-1;k)$ valószínűséggel jutottunk ide. A dobozban az $n+1$ golyó közül $k+1$ piros és $n-k$ fehér, így az n. vételnél a fehér húzásának valószínűsége $\frac{n-k}{n+1}$. 1 pont

A bizonyítást ezzel lezárhatjuk, hiszen az indukciós feltételt felhasználva

$$P(n;k) = P(n-1;k-1) \cdot \frac{k}{n+1} + P(n-1;k) \cdot \frac{n-k}{n+1} =$$

$$= \frac{1}{n} \cdot \frac{k}{n+1} + \frac{1}{n} \cdot \frac{n-k}{n+1} = \frac{1}{n+1}.$$ 1 pont

Összesen 7 pont

3. Határozzuk meg, mely egész n és m számokra teljesül az alábbi egyenlet:

$$n^5 + n^4 = 7^m - 1.$$

Megoldás: Ha $m < 0$, akkor a jobb oldal nem egész, míg a bal oldal minden esetben egész. 1 pont

Ha $m = 0$, akkor az $n^5 + n^4 = n^4(n+1) = 0$ egyenletnek az $n = 0$ és $n = -1$ a megoldása. 1 pont

A továbbiakban feltehetjük, hogy $0 < m$, tehát mindkét oldal pozitív. Mivel minden egészre $|n^5| \geq |n^4|$, ezért ha $n \leq 0$, akkor a bal oldal nem pozitív. 1 pont

Mostantól feltehetjük, hogy $0 < n$. Mindkét oldalhoz 1-et adunk és a bal oldalon szorzattá alakítunk, felhasználva az $n^3 - 1 = (n-1)(n^2+n+1)$ azonosságot:

$$n^5 + n^4 + 1 = (n^5 - n^2) + (n^4 - n) + (n^2 + n + 1) =$$

$$= n^2(n-1)(n^2+n+1) + n(n-1)(n^2+n+1) + (n^2+n+1) =$$

$$= (n^3 - n + 1)(n^2 + n + 1) = 7^m.$$ 2 pont

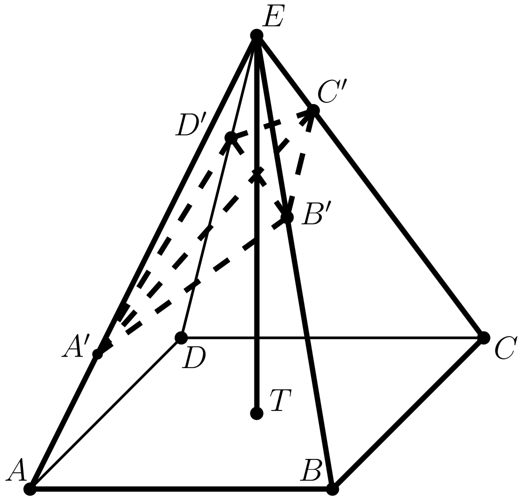
Ezek szerint $n^3 - n + 1$ és $n^2 + n + 1$ is 7-hatvány. Az $n = 1$ nem jó, mert $n^2 + n + 1 = 3$. Az $n = 2$ viszont jó, ekkor $n^3 - n + 1 = 7$ és $n^2 + n + 1 = 7$ és $m = 2$.

Ha $2 < n$, akkor $n^3 - n + 1$ és $n^2 + n + 1$ is nagyobb 7-nél, ezért csak úgy lehet 7-hatvány, ha mindkettő osztható 49-cel. Mivel $n^3 - n + 1 = (n-1)(n^2+n+1) - (n-2)$, ezért $n-2$ is osztható 49-cel. Ekkor $n^2 + n + 1 = (n+3)(n-2) + 7$ miatt a 7-nek is oszthatónak kellene lennie 49-cel, ami viszont nem teljesül. 2 pont

A feladat $(n; m)$ megoldásai a $(-1; 0)$, $(0; 0)$ és a $(2; 2)$ számpárok.

Összesen 7 pont

4. Az $ABCD$ négyzet alapú egyenes gúla csúcsa E. A BE, CE és DE oldaléleken van rendre B', C' és D' úgy, hogy $BB' : B'E = 3 : 2$, $CC' : C'E = 3 : 1$ és $DD' : D'E = 2 : 1$. Legyen a $B'C'D'$ pontok által meghatározott sík és az AE él közös pontja A'. Határozzuk meg az $AA' : A'E$ arányt.



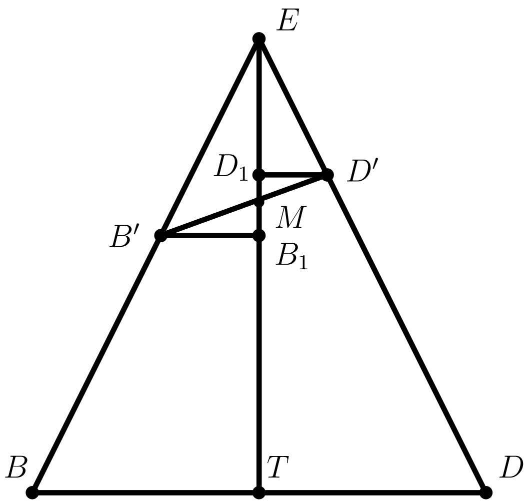
Megoldás: Legyen az $ABCD$ négyzet középpontja T, ez éppen a gúla E-ből induló magasságának talppontja. Tekintsük a TE szakaszt egységnyinek. Használjuk ki, hogy az $A'B'C'D'$ négyszög $A'C'$ és $B'D'$ átlói rendre az ACE és BDE síkokon belül helyezkednek el, ezért metszéspontjuk rajta van ezen két sík metszésvonalán, azaz TE-n. Legyen az $A'B'C'D'$ átlóinak metszéspontja M. Tekintsük a gúlának az imént említett két síkmetszetét. 1 pont

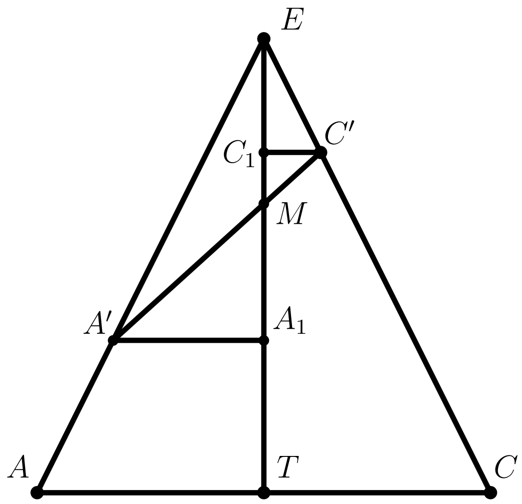
Először vizsgáljuk a BDE háromszöget, legyen B' és D' merőleges vetülete TE-n rendre B_1 és D_1. Ekkor $EB'B_1$ és EBT hasonlóak, a feladat szövegében szereplő feltételek alapján hasonlósági arányuk 2:5. Ugyanígy $ED'D_1$ és EDT hasonló, az arány 1:3.

Használjuk ki, hogy $B'B_1M$ és $D'D_1M$ is hasonló. Ebből a megfelelő oldalak arányát felírva kiszámolhatjuk az ME szakasz hosszát:

$$\frac{B_1E}{D_1E}=\frac{B_1B'}{D_1D'}=\frac{B_1M}{MD_1}=\frac{B_1E-ME}{ME-D_1E} \quad \text{azaz} \quad \frac{\frac{2}{5}}{\frac{1}{3}}=\frac{\frac{2}{5}-ME}{ME-\frac{1}{3}},$$

amiből $ME=\frac{4}{11}$ adódik. 3 pont





Most vizsgáljuk az ACE háromszöget, legyen A' és C' merőleges vetülete TE-n rendre A_1 és C_1. A két pár hasonló háromszögünk: $EC'C_1 \sim EA'A_1$ és $C'C_1M \sim A'A_1M$. Legyen az A_1E szakasz hossza x és írjuk fel az említett hasonlóságok alapján a megfelelő oldalak arányát:

$$\frac{A_1E}{C_1E}=\frac{A_1A'}{C_1C'}=\frac{A_1M}{MC_1} \quad \text{azaz} \quad \frac{x}{\frac{1}{4}}=\frac{x-\frac{4}{11}}{\frac{4}{11}-\frac{1}{4}}.$$

Ebből $x=\frac{2}{3}$, tehát a feladatban kitűzött kérdésre a válasz:

$$AA':A'E=(1-x):x=1:2.$$ 3 pont

Összesen 7 pont