A 2019/2020. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

Javítási-értékelési útmutató

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2019. november A versenybizottság

1. feladat
Jelölje $d(n)$ az $n>0$ egész szám pozitív osztóinak a számát. Tegyük fel, hogy $d(k)^2=d(k^4)$. Bizonyítsuk be, hogy alkalmas $j\geq 0$ egészre $d(k)=3^j$.

Megoldás: Ha a k szám prímtényezős felbontása $k=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\dots p_m^{\alpha_m}$, akkor

$$d(k)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\dots(\alpha_m+1). \qquad \text{(1 pont)}$$

Ekkor k^4 prímtényezős felbontása $k^4=p_1^{4\alpha_1}p_2^{4\alpha_2}\dots p_m^{4\alpha_m}$, és így

$$d(k^4)=(4\alpha_1+1)(4\alpha_2+1)\dots(4\alpha_m+1). \qquad \text{(1 pont)}$$

A $d(k)^2=d(k^4)$ feltétel azzal egyenértékű, hogy

$$(\alpha_1+1)^2(\alpha_2+1)^2\dots(\alpha_m+1)^2=(4\alpha_1+1)(4\alpha_2+1)\dots(4\alpha_m+1). \qquad (*)$$

(1 pont)

Az egyenlőség jobb oldala páratlan, így a bal oldala is, ezért semelyik α_i sem lehet páratlan. (1 pont)

Ezért mindegyik α_i legalább 2, és ekkor

$$(\alpha_i + 1)^2 = \alpha_i^2 + 2\alpha_i + 1 \geq 4\alpha_i + 1.$$

A $(*)$ egyenlőség teljesüléséhez itt minden i-re egyenlőségnek kell állnia, ami csak az $\alpha_i = 2$ esetben lehetséges. (2 pont)

Tehát mindegyik $\alpha_i = 2$, és így valóban $d(k) = 3^m$. (1 pont)

2. feladat

A síkon egy szakasz kísérő sávjának nevezzük azt a két párhuzamos egyenes által határolt sávot (az egyeneseket is hozzáértve), amelynek a középvonalán fekszik a szakasz, és amelynek a szélessége egyenlő a szakasz hosszával. Bizonyítsuk be, hogy bármely síkbeli négyszöget lefedik a négy oldalszakaszához tartozó kísérő sávok.

Első megoldás: A négy sáv együtt nyilvánvalóan lefedi az oldalszakaszokat, ezért elég azt igazolni, hogy a négyszög belsejét is lefedik. Legyen tehát P az $ABCD$ négyszög egy tetszőleges belső pontja. Megmutatjuk, hogy P benne van a négy kísérő sáv közül legalább az egyikben. (1 pont)

A P pontból induló bármelyik félegyenesnek van közös pontja a négyszögnek legalább az egyik oldalával, ezért az APB, BPC, CPD, DPA szögtartományok együtt lefedik a P körüli teljesszöget. (1 pont)

Ezért $APB\sphericalangle + BPC\sphericalangle + CPD\sphericalangle + DPA\sphericalangle \geq 360°$. (Konkáv négyszög esetében itt szigorú egyenlőtlenség is állhat.) (1 pont)

A négy szög között van tehát olyan, amely legalább 90°-os, az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük például, hogy $APB\sphericalangle \geq 90°$. (1 pont)

Ekkor a P pontot lefedi az AB szakasz Thalész-köre, (2 pont)

amelyet pedig lefed az AB oldalhoz tartozó kísérő sáv. (1 pont)

Második megoldás: Először belátjuk azt a segédállítást, hogy ha tetszőlegesen kiválasztjuk egy háromszög két oldalát, akkor az ezekhez tartozó kísérő sávok lefedik a háromszöget. Ebből a feladat állítása azonnal következik, hiszen bármely négyszögnek van (legalább egy) olyan átlója, amely két háromszögre vágja, és ezekben a háromszögekben a négyszög két-két oldalára alkalmazhatjuk a segédállítást. (3 pont)

Legyen tehát adott egy háromszög és annak két oldala, a és b. Indirekt módon tegyük fel, hogy a háromszög valamely P pontját nem fedik le az e két oldalhoz tartozó kísérő sávok. Ekkor P távolsága az a és b oldaltól $a/2$-nél, illetve $b/2$-nél nagyobb. Emiatt a P pont ezekkel az oldalakkal olyan háromszögeket feszít ki, amelyek területe $a^2/4$-nél, illetve $b^2/4$-nél nagyobb. (2 pont)

E két háromszög átfedés nélkül benne fekszik az eredeti háromszögben, amelynek ezért a területe nagyobb $(a^2+b^2)/4$-nél. Az a, b oldalú háromszög területe viszont legfeljebb $ab/2$. Ezzel ellentmondást kaptunk, hiszen $a^2 + b^2 \geq 2ab$. (2 pont)

Megjegyzés: Ha a versenyző csak konvex négyszög esetére ad megoldást, vagy ha a megoldása csak konvex négyszög esetében helyes, akkor a feladatra legfeljebb 6 pont adható.

3. feladat
A legalább másodfokú, valós együtthatós $p(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0$ polinomnak n darab valós gyöke van, amelyek mindegyike a $(0,1)$ nyílt intervallumba esik. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-2} > 0$.

Megoldás: Jelölje $x_1, x_2, \ldots, x_n$ a p polinom n darab valós gyökét; ezekre tehát $0 < x_j < 1$ teljesül. Mivel egy n-edfokú polinomnak legfeljebb n darab (valós) gyöke lehet, ezért p-nek az előbbieken kívül nincs más gyöke, így p gyöktényezős alakja

$$p(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n). \qquad \text{(1 pont)}$$

Vegyük észre, hogy

$$a_0+a_1+\ldots+a_{n-2} = (a_0+a_1+\ldots+a_{n-2}+a_{n-1}+1)-1-a_{n-1} = p(1)-1-a_{n-1}. \qquad \text{(1 pont)}$$

A gyöktényezős alakot a szorzások elvégzésével kifejtve adódik, hogy az x^{n-1} tag együtthatója $-x_1 - x_2 - \ldots - x_n$, következésképpen $a_{n-1} = -x_1 - x_2 - \ldots - x_n$ (természetesen hivatkozhatunk a Viète-formulára is). (1 pont)

Ennek alapján

$$a_0 + a_1 + \ldots + a_{n-2} = (1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) - 1 + x_1 + x_2 + \ldots + x_n,$$

így a bizonyítandó egyenlőtlenség az alábbi alakot ölti:

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_n) > 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_n. \qquad \text{(1 pont)}$$

Ez utóbbi egyenlőtlenséget $n \geq 2$-re teljes indukcióval igazoljuk.

Állapítsuk meg először, hogy $(1 - u)(1 - v) = 1 - u - v + uv > 1 - u - v$ tetszőleges u, v pozitív számokra érvényes. Az $u = x_1$, $v = x_2$ választással ez rögtön az indukció kezdőlépését adja.

Legyen $k > 2$ és tegyük fel, hogy k-nál kisebb n-ekre már bebizonyítottuk az egyenlőtlenséget. Ha adottak a $(0,1)$-beli x_1, x_2, $\ldots$, x_k számok, akkor az indukciós feltevés szerinti

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_{k-1}) > 1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1}$$

egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív $1 - x_k$ kifejezéssel beszorozva kapjuk, hogy

$$(1 - x_1)(1 - x_2)\ldots(1 - x_k) > (1 - x_1 - x_2 - \ldots - x_{k-1})(1 - x_k).$$

A jobb oldalon a fenti megállapítást az $u = x_1 + x_2 + \ldots + x_{k-1}$ és $v = x_k$ választással újra alkalmazva a kívánt egyenlőtlenséget kapjuk, és az indukciós bizonyítás kész. (3 pont)

4. feladat
Legyen $p > 2$ prímszám. Hány olyan részhalmaza van a $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ halmaznak, amely elemeinek az összege osztható p-vel? (Az üres halmaz elemeinek összegét 0-nak tekintjük.)

Megoldás: Azt fogjuk bebizonyítani, hogy az összegek p-es maradéka „majdnem egyenletesen" oszlik el: a nemnulla maradékokat ugyanannyiszor kapjuk meg, míg a 0 maradékot ennél 2-vel többször. A megoldás során végig modulo p számolunk a halmaz elemeivel.

Tekintsük az összes k tagú összeget, ahol $1 \le k \le p-1$. Ha az összes összeg összes tagját lecseréljük a nála t-vel nagyobb számra (modulo p értve, tehát például a $p-t$ számot a 0-ra cseréljük le minden előfordulásánál), akkor visszakapjuk az összes k tagú összeget, csak más sorrendben. (1 pont)

Mindegyik összeg kt-vel növekedett, amiből következik, hogy a 0 maradékot ugyanannyi összegnél kapjuk, mint (kt)-t (hiszen éppen az eredetileg 0 maradékot adó összegekből lett kt maradékot adó). A t érték tetszőlegesen megválasztható. A $0, k, 2k, \ldots, (p-1)k$ számok p-es maradékai $0, 1, \ldots, p-1$ valamilyen sorrendben, ezért az összes maradék ugyanannyiszor áll elő. (Két $\{0, k, 2k, \ldots, (p-1)k\}$-beli szám különbsége $(i-j)k$ alakú $0 \le j < i \le p-1$ mellett, ami nem osztható p-vel, hiszen $p \nmid i-j$ és $p \nmid k$. Tehát a maradékok valóban páronként különböznek.) (3 pont)

Ezzel megmutattuk, hogy bármely $1 \le k \le p-1$ mellett a k tagú összegek között mind a p-féle maradék ugyanannyiszor áll elő. (1 pont)

Ezeken kívül még két összeg van, az üres halmazhoz tartozó 0 összeg és a $\{0, 1, 2, \ldots, p-1\}$ halmazhoz tartozó $\frac{p(p-1)}{2}$ összeg, ami szintén 0 maradékot ad. Vagyis az $1, 2, \ldots, p-1$ maradékokat ugyanannyiszor kapjuk, a 0 maradékot pedig 2-vel többször. (1 pont)

Tehát a p-vel osztható összegek száma

$$\frac{2^p-2}{p} + 2 = \frac{2^p + 2p - 2}{p}. \qquad \text{(1 pont)}$$

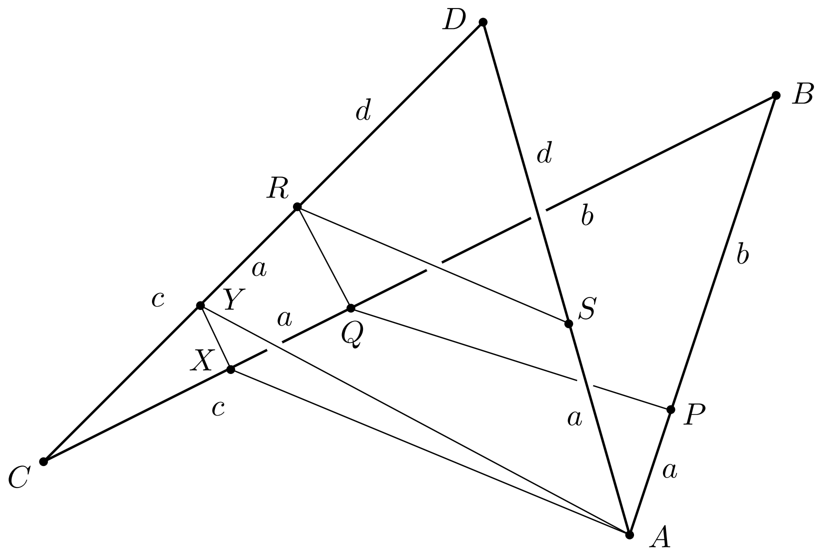
Megjegyzés: Komplex számok segítségével a feladat a következőképpen oldható meg. Legyen ε az egyik 1-től különböző p-edik egységgyök. Az $(1+1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\ldots(1+\varepsilon^{p-1})$ szorzatban a zárójeleket felbontva ε-hatványok összegét kapjuk. Felhasználva, hogy $\varepsilon^p = 1$, minden kitevőt lecserélhetünk a p-es maradékára, így egy $a_0 + a_1\varepsilon + \ldots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1}$ alakú összeget kapunk, ahol $a_0, a_1, \ldots, a_{p-1}$ éppen azt adja meg, hogy a szóban forgó összegekben hányszor kaptuk rendre a $0, 1, \ldots, p-1$ maradékot. (Az ugyanis, hogy k benne van-e a halmazban, annak felel meg, hogy az $(1+\varepsilon^k)$ tényezőből az 1-et vagy az ε^k-t választjuk.) Legyen $q(x) = (x-1)(x-\varepsilon)\ldots(x-\varepsilon^{p-1}) = x^p - 1$. Ekkor $(1+1)(1+\varepsilon)(1+\varepsilon^2)\ldots(1+\varepsilon^{p-1}) = = (-1)^p q(-1) = -((-1)^p - 1) = 2$. Tehát $(a_0-2) + a_1\varepsilon + \ldots + a_{p-1}\varepsilon^{p-1} = 0$, ami csak úgy lehet, ha $a_0 - 2 = a_1 = \ldots = a_{p-1}$, hiszen az $x^{p-1} + \ldots + x + 1$ polinom irreducibilis (a racionális számtest felett), tehát a nemnulla maradékokat ugyanannyiszor kapjuk, a 0 maradékot pedig ennél 2-vel többször.

5. feladat
Legyen A, B, C, D négy különböző pont a térben. Tegyük föl, hogy az AB, BC, CD és DA egyenesek érintenek egy gömböt az AB, BC, CD, DA szakaszok egy-egy belső pontjában. Bizonyítsuk be, hogy a négy érintési pont egy síkban van.

Első megoldás: Jelölje az érintési pontokat az AB, BC, CD, DA szakaszokon rendre P, Q, R, S. Feltehetjük, hogy A, B, C, D nem fekszenek egy síkban, mert akkor P, Q, R, S is ugyanebben a síkban van és nincs mit bizonyítani.

Az AP és AS szakaszok ugyanabból az A pontból a gömbhöz húzott érintőszakaszok, ezért egyenlők, legyen $a = AP = AS$. Hasonló módon legyen $b = BQ = BP$, $c = CR = CQ$ és $d = DS = DR$. (1 pont)

Ha $a = c$, akkor az ABC háromszög egyenlő szárú, és P, Q szimmetrikusan elhelyezkedő pontok a szárakon, ezért PQ párhuzamos AC-vel. Ugyanígy az ADC háromszögben RS párhuzamos AC-vel. Tehát PQ és RS egymással is párhuzamosak, és így a négy pont egy síkban van. (2 pont)



Ha $a \neq c$, akkor az általánosság csorbítása nélkül feltehetjük, hogy $a < c$. Mérjük föl az a távolságot Q felől a QC szakaszra, és R felől az RC szakaszra, így az X, illetve Y pontokat kapjuk, amelyek mindketten C-től $c - a$ távolságra vannak. Az ABX egyenlő szárú háromszögben P és Q szimmetrikusan elhelyezkedő pontok a szárakon, ezért AX párhuzamos PQ-val. Ugyanilyen okból az ADY háromszögben AY párhuzamos RS-sel, valamint a QCR háromszögben XY párhuzamos QR-rel. (2 pont)

Az A, X, Y pontok nincsenek egy egyenesen, mert akkor A, B, C, D egy síkban volna (mégpedig a C pontot és ezt az egyenest tartalmazó síkban). Tekintsük azt az U síkot, amely párhuzamos az AXY síkkal és a P ponton halad át. Az előbbiek alapján a PQ, QR, RS szakaszok mindegyike párhuzamos az AXY síkkal, ezért ebből lépésről lépésre haladva következik, hogy ezek a szakaszok – és így P-vel együtt a Q, R, S pontok is – az U síkban fekszenek. (2 pont)

Második megoldás: Az első megoldáshoz hasonlóan vezessük be a P, Q, R, S és a, b, c, d jelöléseket. (1 pont)

Legyenek $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$, $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$ rendre AB, BC, CD, DA irányú egységvektorok. Az SAP egyenlő szárú háromszögből kapjuk, hogy $a\mathbf{v} + a\mathbf{x} = \overrightarrow{SP}$. A PBQ, QCR és RDS háromszögekből hasonló módon $b\mathbf{x} + b\mathbf{y} = \overrightarrow{PQ}$, $c\mathbf{y} + c\mathbf{u} = \overrightarrow{QR}$, $d\mathbf{u} + d\mathbf{v} = \overrightarrow{RS}$ adódik. Ezért

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} + \mathbf{u} + \mathbf{v} = \overrightarrow{SP}/a + \overrightarrow{QR}/c = \overrightarrow{PQ}/b + \overrightarrow{RS}/d\,. \qquad \text{(2 pont)}$$

A $\overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QR} = \overrightarrow{PR}$ és $\overrightarrow{RS} + \overrightarrow{SP} = \overrightarrow{RP}$ összefüggéseket felhasználva a második egyenlőség átírható a

$$-\overrightarrow{PS}/a + \big(\overrightarrow{PR} - \overrightarrow{PQ}\big)/c = \overrightarrow{PQ}/b + \big(\overrightarrow{PS} - \overrightarrow{PR}\big)/d$$

alakba. Ezt átrendezve az

$$\overrightarrow{PR}\big((1/c) + (1/d)\big) = \overrightarrow{PQ}\big((1/b) + (1/c)\big) + \overrightarrow{PS}\big((1/a) + (1/d)\big)$$

egyenlőséget kapjuk. (2 pont)

Mivel c és d pozitív számok, $\overrightarrow{PR}$ együtthatója nem nulla, és így $\overrightarrow{PR}$ felírható $\overrightarrow{PQ}$ és $\overrightarrow{PS}$ alkalmas skalárszorosainak összegeként. Tehát R tényleg benne van a P, Q, S pontok síkjában. (2 pont)

Megjegyzés: A feladat állítása nem maradna igaz, ha megengednénk, hogy az érintési pontok ne az AB, BC, CD, DA szakaszok belsejébe, hanem csak azok egyenesére essenek. Az igenlő válasz ebben az esetben azon múlik, hogy páros sok (0, 2, vagy 4) van-e a szakaszok között, ahol az érintési pont kívülre esik.