



OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\lg x + \lg y + \lg z = 0,$$

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) + \lg^2\left(\frac{y}{z}\right) + \lg^2\left(\frac{z}{x}\right) = 6,$$

$$\lg x \cdot \lg^2(yz) + \lg y \cdot \lg^2(zx) + \lg z \cdot \lg^2(xy) = 0.$$

2. feladat Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő elemei, a legnagyobb szöge kétszerese a legkisebbnek. Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát, ha a területe $240 \cdot \sqrt{7}$.

3. feladat Egy hat pontú teljes gráf minden élét három szín (piros, kék, zöld) valamelyikével színezzük. Tekintsük először a hat pontot és csak a piros éleket. Ezen gráf legtöbb pontot tartalmazó komponensében, azaz összefüggő részében, a pontok számát jelölje p . Hasonlóan kapjuk a k és z számokat a másik két színt tekintve. Például, ha a csúcsok A, B, C, D, E, F és minden A -ból induló él piros, a BC és DE él kék, a többi pedig zöld, akkor $p = 6$, $k = 2$, $z = 5$.

(a) Lehet-e, hogy $p = k = z = 6$?

(b) Keressünk olyan színezést, amelyre $M = \max(p, k, z)$ a lehető legkisebb.

4. feladat Legyen n pozitív egész. Vegyünk $2n$ darab különböző prímszámot, jelölje szorzatukat L . Tekintsük azon pozitív egész $a < b$ számokat, amelyekre a osztója b -nek és b osztója L -nek. Igazoljuk, hogy ezen (a, b) párok száma 5-tel osztható.