OKTATÁSI HIVATAL

Az 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(GIMNÁZIUM)

<u>JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ</u>

1. feladat Oldjuk meg a következő egyenletrendszert a valós számok halmazán:

$$\lg x + \lg y + \lg z = 0,$$

$$\lg^2\left(\frac{x}{y}\right) + \lg^2\left(\frac{y}{z}\right) + \lg^2\left(\frac{z}{x}\right) = 6,$$

$$\lg x \cdot \lg^2(yz) + \lg y \cdot \lg^2(zx) + \lg z \cdot \lg^2(xy) = 0.$$

Megoldás: Az egyenletrendszer akkor értelmezett, ha x, y, z pozitív valós számok.
1 pont

Legyen $\lg x = a$, $\lg y = b$, $\lg z = c$. A logaritmusos azonosságok felhasználásával az egyenletrendszer így alakul:

$$a + b + c = 0, \tag{1}$$

$$(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 = 6, \tag{2}$$

$$a(b+c)^2 + b(c+a)^2 + c(a+b)^2 = 0. \tag{3}$$

1 pont

Az (1) egyenletből $c = -(a+b)$, írjuk ezt be (2)-be. Rendezés után:

$$a^2 + b^2 + ab = 1. \tag{4}$$

Most írjuk be $c = -(a+b)$-t (3)-ba, rendezés után kapjuk: $ab(a+b) = 0$. 2 pont

Ez utóbbi szorzat akkor 0, ha valamelyik tényezője 0. Ha $a = 0$, akkor (4)-ből $b^2 = 1$ és $c = -b$. Az (a, b, c) megoldások a $(0, 1, -1)$ és a $(0, -1, 1)$. Ha $b = 0$, akkor a megoldások az $(1, 0, -1)$ és a $(-1, 0, 1)$. Végül $a + b = 0$ esetben $a = -b$, amiből adódó megoldások az $(1, -1, 0)$ és a $(-1, 1, 0)$. 2 pont

Az eredeti egyenletrendszer megoldásai ezek alapján $\{x, y, z\} = \{10, 1, \frac{1}{10}\}$. A megoldásokat ellenőrizzük, valóban mind a hat sorrend megfelelő. 1 pont

Összesen: 7 pont

Az a, b, c-vel felírt egyenletrendszer megoldása történhet másként is. A (2) egyenlet átrendezve $2(a+b+c)^2 - 6(ab+bc+ca) = 6$ és így (1) felhasználásával $ab+bc+ca = -1$.
1 pont

A (3) egyenlet bal oldalát kifejtve és (1)-et felhasználva $abc = 0$ adódik. 1 pont

Megkaptuk $a + b + c$, $ab + bc + ca$ és abc értékét, így a gyökök és együtthatók közti összefüggéseket felhasználva felírható a t ismeretlenre az a harmadfokú egyenlet, aminek gyökei éppen a, b, c, ez pedig a $t^3 - t = 0$. Ennek gyökei a $0, 1, -1$. Mivel az egyenletrendszer a változókban szimmetrikus, mind a hat féle lehetséges sorrend jó megoldást ad. 2 pont

2. feladat Egy háromszög oldalai egy számtani sorozat egymást követő elemei, a legnagyobb szöge kétszerese a legkisebbnek. Határozza meg a háromszög oldalainak hosszát, ha a területe $240 \cdot \sqrt{7}$.

1. Megoldás: Legyenek a háromszög oldalai $a < b < c$, ahol $a = b - d$ és $c = b + d$. A legkisebb szög az a oldallal szemközti α, a legnagyobb a c oldallal szemközti $\gamma = 2\alpha$. 1 pont

A szinusztétel miatt

$$\frac{b-d}{b+d} = \frac{a}{c} = \frac{\sin\alpha}{\sin\gamma} = \frac{\sin\alpha}{\sin 2\alpha} = \frac{\sin\alpha}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{1}{2\cos\alpha}.$$ 1 pont

Így $\cos\alpha = \dfrac{b+d}{2(b-d)}$, amit írjunk be a koszinusztételbe:

$$(b-d)^2 = b^2 + (b+d)^2 - 2b(b+d)\frac{b+d}{2(b-d)}.$$ 1 pont

Ezt az egyenletet a pozitív $(b-d)$-vel beszorozhatjuk, rendezzük és osztjuk a pozitív b-vel, így $b = 5d$ adódik. 1 pont

Ebből $\cos\alpha = \dfrac{b+d}{2(b-d)} = \dfrac{6d}{8d} = \dfrac{3}{4}$. Mivel $0 < \alpha < 180°$, ezért $\sin\alpha > 0$ és így $\sin\alpha = \sqrt{1-\cos^2\alpha} = \frac{\sqrt{7}}{4}$. 1 pont

A feladat szövegében szerepel a háromszög területe, ezt most felhasználjuk:

$$240 \cdot \sqrt{7} = \frac{bc\sin\alpha}{2} = \frac{5d \cdot 6d \cdot \frac{\sqrt{7}}{4}}{2}.$$

Ennek pozitív megoldása a $d = 8$, amiből a háromszög oldalai $a = b - d = 5d - d = 32$, $b = 40$ és $c = 48$. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. Megoldás: Az előző megoldás jelöléseit használjuk. Legyen a C csúcsból induló szögfelező és az AB oldal metszéspontja D. A szögfelezőtétel miatt

$$BD = \frac{b-d}{2b-d}(b+d).$$ 2 pont

A háromszög szögeire vonatkozó feltétel miatt ABC és CBD hasonlóak, hiszen $BAC\angle = BCD\angle = \alpha$ és $ACB\angle = CDB\angle = 2\alpha$. 1 pont

Írjuk fel a két háromszögben a leghosszabb és a legrövidebb oldal arányát: $AB : BC = BC : BD$. Ez utóbbi összefüggésbe írjuk be a szögfelező tételből kifejezett BD-t:

$$\frac{AB}{BC} = \frac{b+d}{b-d} = \frac{b-d}{\frac{b-d}{2b-d}(b+d)} = \frac{BC}{BD}.$$

Ezt rendezve és a pozitív b-vel leosztva $b = 5d$ adódik. 2 pont

A háromszög oldalai tehát $a = 4d$, $b = 5d$, $c = 6d$. A területre vonatkozó Hérón-képlet:

$$240 \cdot \sqrt{7} = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{\frac{15}{2}d \cdot \frac{7}{2}d \cdot \frac{5}{2}d \cdot \frac{3}{2}d}.$$

Ebből $d = 8$, így a háromszög oldalai $a = 32$, $b = 40$ és $c = 48$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat Egy hat pontú teljes gráf minden élét három szín (piros, kék, zöld) valamelyikével színezzük. Tekintsük először a hat pontot és csak a piros éleket. Ezen gráf legtöbb pontot tartalmazó komponensében, azaz összefüggő részében, a pontok számát jelölje p. Hasonlóan kapjuk a k és z számokat a másik két színt tekintve. Például, ha a csúcsok A, B, C, D, E, F és minden A-ból induló él piros, a BC és DE él kék, a többi pedig zöld, akkor $p = 6$, $k = 2$, $z = 5$.

(a) Lehet-e, hogy $p = k = z = 6$?

(b) Keressünk olyan színezést, amelyre $M = \max(p, k, z)$ a lehető legkisebb.

Megoldás: (a) Lehetséges, többféle ilyen színezés készíthető. Például legyenek a piros élek: AB, BC, CD, DE, EF; a kék élek AC, CE, EB, BF, FD; a zöld élek AD, AE, AF, CF és BD. 2 pont

Megfigyelhetjük, hogy mindhárom szín összefüggővé teszi a hat pontú gráfot, ezért mindegyikben legalább öt él szerepel. Mivel összesen $\binom{6}{2} = 15$ él van, ezért mindegyik színből éppen 5 él lesz és mindegyik szín egy fagráfot alkot.

(b) Megmutatjuk, hogy $M \geq 4$, azaz minden színezés esetén lesz a gráfban valamelyik színből legalább 4 pontú komponens. Tekintsük az A pontot, ebből öt él indul. Ha ezek közül legalább három azonos színű, máris találtunk legalább 4 pontú komponenset. 1 pont

Ha nincs három azonos színű, akkor a színek eloszlása valamilyen sorrendben 2+2+1. Feltehető, hogy AB és AC piros, AD és AE kék, AF pedig zöld. Tekintsük azon éleket, amelyek A piros és kék szomszédai közt futnak (hat ilyen van, például BD). Amennyiben egy ilyen él piros, akkor lesz legalább négy pontú piros komponens. Ha kék, lesz legalább négy pontú kék komponens. Ha mind a hat él zöld, akkor a B, C, D, E-t tartalmazó zöld komponens legalább 4 pontú. 2 pont

Meg kell még mutatnunk, hogy az M-re adott alsó korlát nem javítható. Megadunk egy olyan színezést, amiben $M = 4$. Legyen az A, B, C, D pontok közt futó minden él piros, továbbá az EF él piros. Legyen EA, EB, FC, FD kék továbbá EC, ED, FA, FB zöld. Ebben a gráfban $p = 4$, $k = z = 3$. 2 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Legyen n pozitív egész. Vegyünk $2n$ darab különböző prímszámot, jelölje szorzatukat L. Tekintsük azon pozitív egész $a < b$ számokat, amelyekre a osztója b-nek és b osztója L-nek. Igazoljuk, hogy ezen (a, b) párok száma 5-tel osztható.

Megoldás: Legyen $L = p_1 \cdot \ldots. \cdot p_{2n}$, a p_i prím kitevője legyen a-ban α_i, b-ben β_i. Amennyiben az $a = b$ eseteket is megszámoljuk, akkor minden prím esetén a feladat feltétele miatt a lehetséges (α_i, β_i) párok: (0,0), (0,1) és (1,1). Tehát három lehetőség van. 2 pont

Mivel $2n$ prím van és a kitevőket egymástól függetlenül választhatjuk, ekkor az (a, b) párok száma 3^{2n}. 1 pont

Ebből ki kell vonni azon párok számát, ahol $a = b$. Minden i-re $\alpha_i = \beta_i$ és értéke 0, vagy 1. Tehát két lehetőség van. Most is a kitevőket egymástól függetlenül választhatjuk, így az $a = b$ párok száma 2^{2n}. 2 pont

Felírjuk a feladat feltételeinek eleget tevő párok számát és szorzattá alakítjuk:

$$3^{2n} - 2^{2n} = (3^2)^n - (2^2)^n = (3^2 - 2^2)(3^{2(n-1)} + 3^{2(n-2)} \cdot 2^2 + ... + 3^2 \cdot 2^{2(n-2)} + 2^{2(n-1)}).$$

1 pont

A szorzat első tényezője $3^2 - 2^2 = 5$, ezzel az állítást beláttuk. 1 pont

Összesen: 7 pont