OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. feladat Az $M_1 = \{1\}$, $M_2 = \{3, 5\}$, $M_3 = \{7, 9, 11\}$ ... halmazokat úgy készítettük, hogy növekvő sorrendben vettük a pozitív egészek közül a páratlan számokat és az első halmazba tettünk egyet, a másodikba a következő kettőt és így tovább. Így az M_n halmaz elemei az n-nél kisebb indexű halmazokban nem szereplő számok közül a nagyság szerint soron következő n darab páratlan szám.

Határozzuk meg az M_{100} halmazban levő számok összegét.

Megoldás: Az M_1, M_2, ..., M_n halmazoknak együtt összesen $1+2+...+n = \frac{n\cdot(n+1)}{2}$ eleme van, az első $\frac{n(n+1)}{2}$ páratlan szám. 1 pont

Ebből következik, hogy az M_{100} halmazban levő számok összegét megkaphatjuk, ha az első 100 halmazban levő számok összegéből kivonjuk az első 99 halmazban levő számok összegét, tehát az első $\frac{100(100+1)}{2}$ páratlan szám összegéből kivonjuk az első $\frac{99(99+1)}{2}$ páratlan szám összegét. 2 pont

Az első k páratlan szám számtani sorozatot alkot, így összegük meghatározható a számtani sorozatokra vonatkozó összegzési képlettel:

$$1 + 3 + ... + (2k-1) = \frac{k\cdot(1+(2k-1))}{2} = k^2.$$

2 pont

Az eddigiek alapján az M_{100} halmazban álló számok összege

$$\left(\frac{100(100+1)}{2}\right)^2 - \left(\frac{99(99+1)}{2}\right)^2 = 1000000 = 10^6.$$

2 pont

Összesen: 7 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

2. feladat Panka és Noémi memória kártyajátékot játszanak. A kártyapakli 32 lapból áll, ezek között 16 féle található, mindegyik fajtából éppen kettő van. A lapokat összekeverve az asztalra helyezzük úgy, hogy mindegyiknek a hátlapja látható. A játékosok felváltva jönnek, a soron következő a kártyák közül kettőt megfordít egymás után. Ha párt talált, felveszi és megtartja őket, és újra ő következik. Ha nem párt talál, visszafordítja, és a társa következik. Feltételezzük, hogy a játékosok minden felfordított lapra emlékeznek és már ismert lapot csak akkor fordítanak meg, ha megtalálták a párját. A játék egy pillanatában már csak 8 lap maradt lenn az asztalon, és még egyik sem lett megfordítva. Ebből a helyzetből indulva válaszoljuk meg az alábbi két kérdést, melyek egymástól függetlenek:

(a) Mekkora az esélye, hogy a soron következő Panka begyűjti a megmaradt lapokat anélkül, hogy Noémi sorra kerülne?

(b) Mekkora az esélye, hogy a soron következő húzásnál Panka sem, majd utána Noémi sem talál párt?

Megoldás: (a) Ha Noémi nem kerül sorra, az azt jelenti, hogy Panka négyszer egymás után éppen párt talál. A nyolc lap közül az első felfordítása után hét lap van az asztalon, ezek közül pedig egy lesz az elsőnek választott párja. Így $\frac{1}{7}$ annak az esélye, hogy párt talál Panka az első két lap megfordításával. 1 pont

A megmaradt 6 lapból bármelyiket választva, az asztalon maradó 5 lap közül egy lesz jó, így $\frac{1}{5}$ annak az esélye, hogy újra párt húz Panka. Hasonlóan folytatva, a harmadik pár húzásának esélye $\frac{1}{3}$, végül a megmaradó két lap már biztosan pár, így felvehető és a játék végetér. 1 pont

A felsorolt egymást követő események együttes bekövetkezésének valószínűsége a szorzási szabály szerint $\frac{1}{7} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{105}$. 1 pont

(b) Legyenek a lapok $A, A', B, B', C, C', D, D'$ és feltételezzük hogy a párokból a vessző nélkülieket találják meg előbb. Panka első húzása bármi lehet, jelölje ezt A. Ezt követően $\frac{6}{7}$ az esélye, hogy nem a párjára talál. Jelölje a másodiknak húzott lapot B. 1 pont

A soron következő Noémi első lapja nem lehet A' vagy B', mert akkor fel tudna húzni egy párt. A C és D betűs lapokból 4 van, összesen pedig még 6 lapot nem ismer Noémi, ezért $\frac{4}{6}$ annak az esélye, hogy eddig még nem látott kártyát húz elsőre. Jelölje ezt C. 1 pont

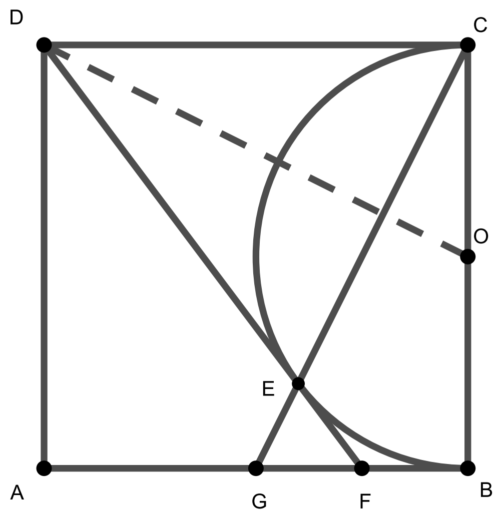
Utolsó húzása a még nem ismert 5 lapból bármi lehet, csak nem C', így ennek esélye $\frac{4}{5}$. 1 pont

Most is a szorzási szabályt alkalmazva, a válasz $\frac{6}{7} \cdot \frac{4}{6} \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{35}$. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat Az $ABCD$ négyzet BC oldala, mint átmérő fölé kört rajzolunk. A D pontból a körhöz húzott érintők érintési pontjai C és E. A négyzet AB oldalának és a DE érintő egyenesnek a metszéspontja legyen F. Az AB oldalnak és a CE egyenesnek a metszéspontja legyen G. Hányad része az EFG háromszög területe a négyzet területének?

Megoldás: Legyen a négyzet oldala a. $CDO\angle = BCG\angle$, mivel merőleges szárú hegyesszögek. Ezért CDO és BCG egybevágóak, hiszen szögeik megegyeznek és mindkét



derékszögű háromszögben a hosszabb befogó éppen a négyzet oldala. Mivel $CO = a/2$, ezért $GB = a/2$. 2 pont

CDE háromszög hasonló GFE háromszöghöz, hiszen oldalaik párhuzamosak. $CD = DE$, így $GF = FE$. Másrészt $FE = FB$, hiszen mindkettő az F-ből húzott érintő szakasz. Ebből következik, hogy $FG = FE = FB = a/4$. 2 pont

A CDE és GFE hasonló háromszögek aránya ezek szerint $CD : GF = 4 : 1$, így az E ponthoz tartozó magasságaik aránya is $4 : 1$, e két magasság összege pedig a, így a GFE háromszög E-hez tartozó magassága $a/5$. 2 pont

A GFE háromszög területét a GF alap és E csúcshoz tartozó magasság segítségével kiszámolva

$$\frac{\frac{a}{4} \cdot \frac{a}{5}}{2} = \frac{a^2}{40}.$$

Tehát az EFG háromszög területe a négyzet területének 40-ed része. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Tekintsük az 1,2,..., 10 számokat valamilyen sorrendben, jelölje őket $a_1, a_2, ..., a_{10}$. Legyen

$$b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad b_3 = a_1 + a_2 + a_3, \quad ..., \quad b_{10} = a_1 + a_2 + ... + a_{10}.$$

Hányféle olyan $a_1, a_2, ..., a_{10}$ sorrend van, ahol a b_1, b_2, ..., b_{10} számok közül egyik sem osztható 3-mal?

Megoldás: Egy összeg 3-mal való oszthatósága szempontjából a tagok 3-as osztási maradéka a lényeges. A tíz szám között 3 darab 0, 3 darab 2, és 4 darab 1 maradékot adó van. 1 pont

Ezek közül a hárommal oszthatók nem változtatják meg a b_i számok hármas maradékát és nyilvan a_1 sem lehet 3-mal osztható. 1 pont

Tekintsük csak az 1 és 2 maradékú számok egymás utáni lehetséges sorrendjét. Mivel semelyik kezdő részletösszegben sem lehet az összeg 3-mal osztható, ezért minden új szám hozzáadásakor az 1 és 2 maradék egyike 3-mal oszthatóra egészíti ki az eddigi összeget, a másik pedig nem. Tehát az első szám pontosan meghatározza a továbbiak sorrendjét, ami lehet (csak a maradékokat leírva) 1,1,2,1,2,1,2, vagy 2,2,1,2,1,2,1. Mivel nekünk 4 darab 1-es és 3 darab 2-es maradékunk van, ezért csak az első sorrend jöhet szóba. 2 pont

Most térjünk rá a sorrendek számára. Nyilván a_1 1 maradékot adó szám. Először helyezzük el a 0 maradékot adó számokat, a 3-as kerülhet 9 helyre, a 6-os 8 helyre a 9-es 7 helyre, eddig ez $9 \cdot 8 \cdot 7 = 504$ lehetőség. 1 pont

Ezek után egyértelmű minden a_i szám hármas maradéka. Az 1 maradékúakat 4!, a 2 maradékúakat 3! féleképpen tehetjük a helyükre, így a megfelelő sorrendek száma $4! \cdot 3! \cdot 504 = 72576$. (Amennyiben a versenyző jól írja fel a szorzatot, de nem számolja ki annak értékét, akkor is megkapja a teljes pontszámot.) 2 pont

Összesen: 7 pont.

5. feladat Oldjuk meg a valós számok halmazán az alábbi egyenletet:

$$\frac{x^{205}+x^{195}}{x^{201}+x^{199}}=\frac{205}{16}.$$

Megoldás: Az egyenlet bal oldalán álló tört $x=0$-nál nem értelmezett. Egyszerűsítünk x^{195}-tel, majd szorzattá bontunk:

$$\frac{x^{205}+x^{195}}{x^{201}+x^{199}}=\frac{x^{10}+1}{x^6+x^4}=\frac{(x^2+1)(x^8-x^6+x^4-x^2+1)}{x^4(x^2+1)}=\frac{205}{16}.$$ 2 pont

Egyszerűsítve

$$x^4-x^2+1-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{x^4}=\frac{205}{16}.$$ 1 pont

Legyen $x^2+\frac{1}{x^2}=y$. Ekkor $x^4+2+\frac{1}{x^4}=y^2$, így a következő másodfokú egyenletet kapjuk:

$$y^2-y-1=\frac{205}{16}.$$ 2 pont

Ennek megoldásai $y_1=4,25$ és $y_2=-3,25$. Mivel y definíciója miatt nem lehet negatív, ezért y_2 nem ad valós megoldást. Az $x^2+\frac{1}{x^2}=4,25$ megoldásai x^2-re a 4 és $\frac{1}{4}$. 1 pont

Ebből x lehetséges értékei $x_1=2$, $x_2=-2$, $x_3=\frac{1}{2}$ és $x_4=-\frac{1}{2}$. Ellenőrizve kapjuk, hogy ezek mindegyike valóban jó megoldás. 1 pont

Összesen: 7 pont.

Megjegyzés: Megkaphatja a teljes pontszámot akkor is a versenyző, ha nem ellenőrzi a kapott gyököket, de hivatkozik az egyenletek ekvivalens átalakításaira.

Amennyiben a versenyző levezetés nélkül talál gyököket és nem bizonyítja, hogy más megoldás nem lehet, akkor 1 pontot kaphat négynél kevesebb gyök esetén és 2 pontot kaphat mind a négyért.