OKTATÁSI HIVATAL

Az 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

1. feladat Határozzuk meg az összes olyan prímszámot, amely előáll $\left[\frac{n^2}{5}\right]$ alakban, ahol n pozitív egész számot jelöl.

(A feladat szövegében szereplő $[y]$ jelölés az y valós szám alsó egészrésze, ami az y-nál nem nagyobb egészek közül a legnagyobb.)

Megoldás: Amennyiben n értéke 4, 5 vagy 6, akkor megkapjuk a 3, 5 illetve 7 prímeket. Megmutatjuk, hogy más prím nem áll elő ilyen alakban.

A megoldás során végignézzük, mi lehet n 5-ös maradéka. Ha $n = 5k$ alakú, akkor $\left[\frac{n^2}{5}\right] = 5k^2$, ami csak $k = 1$ esetén lesz prím, aminek az értéke 5.

1 pont

Ha $n = 5k \pm 1$ alakú, akkor

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 \pm 10k + 1}{5}\right] = 5k^2 \pm 2k = k(5k \pm 2).$$

Mivel n pozitív egész, ezért $k \geq 0$. $k = 0$ esetén $k(5k \pm 2) = 0$, ami nem prím. $k = 1$ esetén megkapjuk az $n = 4$ és $n = 6$-hoz tartozó 3 illetve 7 prímet. Amennyiben $k > 1$, akkor $k(5k \pm 2)$ mindkét tényezője nagyobb egynél, így nem lehet prím. 3 pont

Ha $n = 5k \pm 2$ alakú, akkor

$$\left[\frac{n^2}{5}\right] = \left[\frac{25k^2 \pm 20k + 4}{5}\right] = 5k^2 \pm 4k = k(5k \pm 4).$$

Az előző esethez hasonlóan a $k = 0$ nem lehet jó, $k = 1$ esetén a szorzat 9 vagy 1, ezek egyike sem prím. Ha $k > 1$, akkor $k(5k \pm 4)$ mindkét tényezője nagyobb egynél, így nem lehet prím. 3 pont

Összesen: 7 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

2. feladat Határozzuk meg a következő egyenlet összes valós megoldását:

$$4^{\sin(\pi x)\cdot\cos(\pi x)} - 2x = 0.$$

Megoldás: Ekvivalens átalakítást végzünk. Az egyenlet mindkét oldalához $2x$-et hozzáadunk és az exponenciális kifejezést átalakítjuk a trigonometria és hatványozás azonosságaival:

$$2^{2(\sin(\pi x)\cos(\pi x))} = 2^{\sin(2\pi x)} = 2x. \qquad \text{2 pont}$$

A továbbiakban ezzel az egyenlettel foglalkozunk és vizsgáljuk a két oldalon álló függvényeket. Mivel a szinusz függvény értékkészlete $[-1; 1]$, ezért a bal oldal értéke az $[1/2; 2]$ intervallumban van. A jobb oldalt tekintve azt kapjuk, hogy x értéke az $[1/4; 1]$ intervallumban van. 1 pont

Ezt két részre osztjuk és külön vizsgáljuk amikor x az $[1/4; 1/2]$ vagy az $]1/2; 1]$ intervallumhoz tartozik. 1 pont

Ha $x \in [1/4; 1/2]$, akkor $2\pi x$ értéke a $[\pi/2; \pi]$ intervallumban van, ezen az intervallumon a szinusz függvény szigorúan monoton csökkenő. Mivel a 2-es alapú exponenciális függvény szigorúan monoton növekedő, ezért ha $x \in [1/4; 1/2]$, akkor az átalakított egyenlet bal oldalán álló függvény szigorúan monoton csökkenő. 1 pont

A jobb oldal -azaz a $2x$ függvény- szigorúan monoton növő függvény. Ebből adódóan $x \in [1/4; 1/2]$ esetén egyetlen megoldás lehet és ez az $x = 1/2$. Ekkor az eredeti egyenlettel ekvivalens átalakított egyenletünk mindkét oldalán 1 áll. 1 pont

Ha $x \in]1/2; 1]$, akkor $2\pi x$ értéke a $]\pi; 2\pi]$ intervallumban van. Ezen x értékeknél $\sin(2\pi x) \leq 0$, így a bal oldal legfeljebb 1 lehet, míg a jobb oldalon álló $2x$ függvény értéke 1-nél nagyobb. Ebből következik, hogy nincs több megoldás. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat A hegyesszögű ABC háromszögben $AB \neq CB$, az AC oldal felezőpontja F. Legyen a B-ből induló magasságvonal talppontja az AC oldalon T, az A és C pontok merőleges vetülete a háromszög B csúcsából induló belső szögfelezőjének egyenesén pedig rendre P és Q.

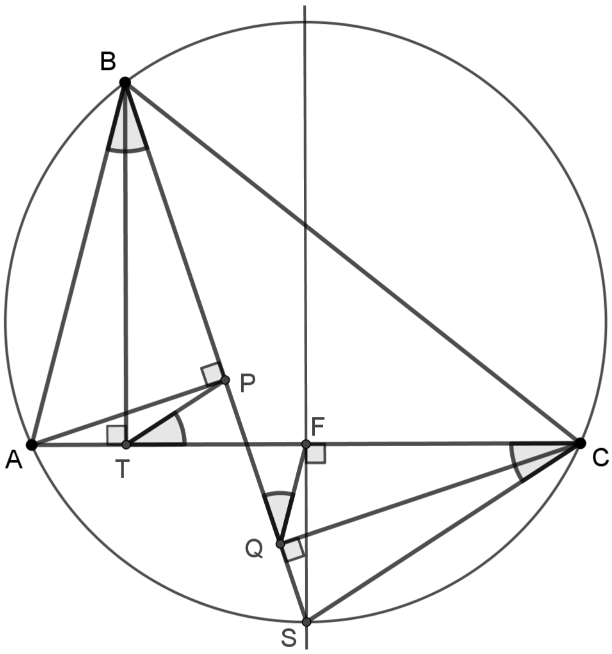
(a) Bizonyítsuk be, hogy P, Q, F és T egy körön helyezkednek el.

(b) Legyen R az ABC köré írt kör sugara, r pedig a P, Q, F és T pontokat tartalmazó kör sugara. Határozzuk meg az ABC háromszög legnagyobb és legkisebb szögének arányát, ha $ABC\angle = 72°$ és $R : r = 2 : 1$.

Megoldás: (a) Legyen $ABC\angle = \beta$ és az ABC köré írt kör B-t nem tartalmazó AC ívének felezőpontja S. Az ív felezőpontján áthalad AC felezőmerőlegese és a B-ből induló belső szögfelező is. Az alábbiakban az $AB < CB$ esetet tárgyaljuk, ekkor a pontok elhelyezkedése az ábrának megfelelő, azaz $AT < TC$ és a szögfelezőn a pontok sorrendben B, P, Q és S. Az $AB > CB$ eset ehhez hasonlóan tárgyalható, vagy az alábbi gondolatmenet irányított szögekkel tekintve általánosan megfelelő. 1 pont

AB Thalesz körén rajta van P és T, így $ATPB$ húrnégyszög. Mivel a húrnégyszögek szemközti szögeinek összege 180°, ezért $ABP\angle = CTP\angle = \beta/2$. 1 pont

CS Thalesz körén rajta van Q és F, így $CFQS$ húrnégyszög, amelyben $FCS\angle = FQB\angle$. Másrészt $FCS\angle = \beta/2$, hiszen az AS ívhez tartozó kerületi szög, ebből adódóan $FQB\angle = \beta/2$. 1 pont



$CTP\angle = FTP\angle = \beta/2 = FQB\angle = FQP\angle$ és a PF egyenes ugyanazon oldalán van T és Q, így a PF szakasz $\beta/2$ szögű látókörén van T és Q. Ezzel megkaptuk, hogy P, Q, F és T egy körön helyezkednek el. 1 pont

(b) Az általánosság rovása nélkül tegyük fel, hogy $AB < CB$ az ábrának megfelelően. Használjuk a háromszög szögeinek szokásos jelölését. Mivel $ATPB$ húrnégyszög, így $TPQ\angle = CAB\angle = \alpha$. BC Thalesz körén van T és Q, ezért $BCA\angle = BQT\angle = \gamma$. Azt kaptuk, hogy az ABC és PTQ háromszögek hasonlóak. 1 pont

Mivel a köréjük írt körök sugarainak aránya $2:1$, ezért megfelelő oldalaik aránya is ugyanennyi, azaz $AB : PT = 2 : 1$. Mivel PT az AB Thalesz körének egy húrja, így $PT = AB \sin TBP\angle$. A $TBP\angle$ hegyesszög és szinusza $1/2$, amiből $TBP\angle = 30°$.

1 pont

Fejezzük ki ezt a szöget:

$$TBP\angle = TBC\angle - PBC\angle = (90° - \gamma) - \frac{\beta}{2} = \frac{\alpha - \gamma}{2},$$

amiből $\alpha - \gamma = 60°$ és ebből $\alpha = 84°$, $\gamma = 24°$. A keresett arány tehát $84 : 24 = 7 : 2$.

1 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Milyen m egész esetén van olyan irracionális x, amire

$$x^{12} + mx, \quad x^3 + 2x^2 \quad \text{és} \quad x^2 + x$$

mindegyike egész.

Megoldás: Legyen $x^2 + x = a$ (1) és $x^3 + 2x^2 = b$ (2), a feltétel szerint a és b egész számok. Az első összefüggésből $x^2 = a - x$, ezt a másodikba írva:

$$x(a-x) + 2(a-x) = b, \quad \text{vagyis} \quad ax - x^2 + 2a - 2x = b.$$

Most is írjuk be x^2 helyébe az $(a-x)$-et

$$ax - (a-x) + 2a - 2x = b, \quad \text{rendezve} \quad ax - x + a = b,$$

amiből $x(a-1)=b-a$. 2 pont

Ha $a \neq 1$, akkor x racionális, ez tehát nem lehet. Ha $a=1$, akkor $b-a=0$, azaz $a=b=1$ és csak ezek lehetnek a feladat szövegéből adódó egész számok. Ekkor az $x^2+x=1$ egyenlet megoldásai $x_{1,2}=\dfrac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$ és ezek irracionális számok. 2 pont

Mivel $x^2+x=1$, így x^2 helyébe a továbbiakban írhatunk $1-x$-et. Mivel $x^3+2x^2=1$, így $x^3=1-2x^2=1-2(1-x)=-1+2x$. Az $x^3=-1+2x$ mindkét oldalát négyzetre emelve $x^6=1-4x+4x^2=1-4x+4(1-x)=5-8x$. Újra négyzetre emelve $x^{12}=25-80x+64x^2=25-80x+64(1-x)=89-144x$. 2 pont

Ezt írjuk be a feladat szövegében szereplő harmadik kifejezésbe:

$$x^{12}+mx=89-144x+mx=89+(m-144)x.$$

Mivel x irracionális, ezért ha m nem 144, akkor a kifejezés értéke is irracionális lesz, így az egyetlen megfelelő m érték a 144. 1 pont

Összesen: 7 pont