OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
harmadik, döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

Javítási–értékelési útmutató

1. Melyek azok a 2020-nál kisebb pozitív egész s számok, amelyekre minden egész n esetén $4n+1$ és $sn+1$ relatív prímek, azaz legnagyobb közös osztójuk 1?

Megoldás: Legyen $(4n+1; sn+1)=d$, ekkor $d|s(4n+1)$ és $d|4(sn+1)$, így $d|s-4$. Ha $s-4=\pm1$, akkor teljesülnek a feladat feltételei, azaz jó megoldás az $s=3$ és $s=5$.

2 pont

Mivel $4n+1$ páratlan, d is biztosan páratlan. Ezért s akkor is megfelelő lesz, ha $s-4$ páratlan osztója csak ±1 lehet. Így $s-4=\pm2^k$, ahol k pozitív egész. Ebből $s=4\pm2^k$, amiből az említett két számon kívül kapjuk s-re a 2, 6, 8, 12, 20, 36, 68, 132, 260, 516, 1028 megoldásokat.

3 pont

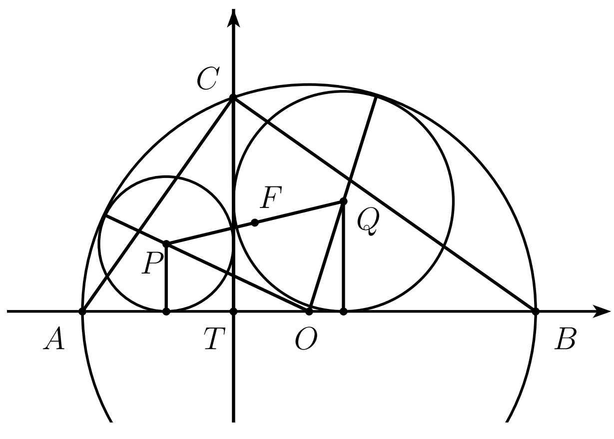
Amennyiben s az említett számoktól különbözik, akkor $s-4$-nek van egynél nagyobb páratlan osztója, jelölje ezt t. Páratlan szám négyzetének négyes maradéka egy, ezért $(t^2-1):4=n'$ egy egész. Ekkor $4n'+1=t^2$, ami osztható t-vel. $t|s-4$ miatt $t|sn'-4n'$, így $t|(sn'-4n')+(4n'+1)=sn'+1$. Találtunk tehát olyan n' számot, amikor $4n'+1$ és $sn'+1$ nem relatív prímek. A már megadott 13 számon kívül nincs más megoldás.

2 pont

Összesen 7 pont

2. Az ABC háromszögben $ACB\angle=90°$, a C-hez tartozó magasság talppontja az AB oldalon T. Legyen az AB oldalt, a CT magasságot és az ABC köré írt kör C-t tartalmazó AB ívét belülről érintő két kör középpontja P és Q.

Bizonyítsuk be, hogy PQ felezőpontja az ABC beírt körének középpontja.



Megoldás: Az állítást számolással igazoljuk, helyezzük a háromszöget a koordináta rendszerbe és legyen a köré írt kör sugara egységnyi. Feltehető, hogy $AC \leq BC$, ekkor legyen a köré írt kör középpontja $O(d;0)$, a csúcsok $A(d-1;0)$, $B(1+d;0)$ és $C(0;\sqrt{1-d^2})$. Az A és B-hez közelebbi kis körök sugarát jelölje rendre a és b. A kis körök elhelyezkedését leíró feltétel miatt ezek érintik a tengelyeket, így $P(-a;a)$, $Q(b;b)$. Annak feltétele, hogy a köré írt kört is érintsék:

$$a^2+(a+d)^2=(1-a)^2, \quad b^2+(b-d)^2=(1-b)^2. \qquad \text{2 pont}$$

Mindkét másodfokú egyenletnek a pozitív gyökére van szükségünk, így
$a=-d-1+\sqrt{2+2d}$ és $b=d-1+\sqrt{2-2d}$. 1 pont

Kiszámolhatjuk PQ felezőpontját, jelölje ezt F, koordinátái $((b-a)/2;(b+a)/2$, azaz

$$F\left(\frac{\sqrt{2-2d}-\sqrt{2+2d}+2d}{2};\frac{\sqrt{2-2d}+\sqrt{2+2d}-2}{2}\right). \qquad \text{1 pont}$$

Most tekintsük a beírt kör I középpontját. Jelölje a háromszög kerületének felét s. Ismeretes, higy I-nek az x koordinátája éppen $d-1+s-BC$, a beírt kör sugara és egyben y koordinátája pedig $\frac{1}{2}(AC+BC-AB)$. 1 pont

A befogó tételből $BC=\sqrt{2+2d}$, $CA=\sqrt{2-2d}$, továbbá $AB=2$. 1 pont

Ebből, kapjuk, hogy

$$I\left(d-1+\frac{2+\sqrt{2-2d}-\sqrt{2+2d}}{2};\frac{\sqrt{2+2d}+\sqrt{2-2d}-2}{2}\right).$$

Mivel F és I megfelelő koordinátái páronként megegyeznek, ezzel az állítást beláttuk.
1 pont

Összesen 7 pont

3. Adott egy n oszlopos és m soros táblázat, ahol n és m is egynél nagyobb pozitív egészek. A táblázat mezőire korongokat rakunk, minden mezőre legfeljebb egyet. Nevezzünk két korongot szomszédosnak, ha egy sorban vagy oszlopban vannak, és az őket összekötő szakasz mentén lévő mezőkön nincsen más korong. Tudjuk, hogy minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. Maximálisan hány korong kerülhetett a táblázatra?

Megoldás: Látható, hogy megfelelő konstrukció, ha a táblázat kerülete mentén helyezzük el a korongokat, ez összesen $2(m+n)-4$ darab korong. Ezek teljesítik a feltételt, hiszen a téglalap kerületén lévő korongoknak nem lehet minden irányban szomszédja. A továbbiakban belátjuk, hogy ennél több korong nem helyezhető el. 1 pont

Vegyünk egy tetszőleges korongelhelyezést. Sorszámozzuk balról jobbra, illetve felülről lefelé az oszlopokat, illetve sorokat az $1,2,...,n$ és $1,2,...,m$ számokkal. Jelölje x_i azt, hogy az i-edik oszlopban hány korong van, valamint y_j azt, hogy a j-edik sorban hány korong van. Ekkor a K, korongok száma a négyzetrácsban:

$$K=\sum_{i=1}^{n}x_i=\sum_{j=1}^{m}y_j.$$

Legyen továbbá S a korongszomszéd-párok száma. A feltétel szerint $2S \leq 3K$, hiszen minden korongnak legfeljebb három szomszédja van. 2 pont

Előbbi becslés viszont erősíthető: tekintsük azt a legnagyobb sorszámú oszlopot, amelyben van korong, és azon belül a legnagyobb és legkisebb sorszámú sorban lévő korongot. Ha ez a két korong megegyezik, akkor annak az egy korongnak legfeljebb 1 szomszédja lehet. Ha pedig különböző korongokról van szó, akkor mindkettő legfeljebb 2 szomszéddal rendelkezhet. Ugyanez elmondható a legkisebb sorszámú oszlop szélső korongjaira. Ha csak egy oszlopban vannak a korongok, akkor nem kaphatunk az említettnél jobb konstrukciót. Így a becslést erősítettük:

$$2S \leq 3K - 4. \qquad \text{2 pont}$$

Számoljuk meg a szomszédságokat most soronként és oszloponként. Ha egy sorban vagy oszlopban k darab korong van, akkor azok egymás között éppen $k-1$ darab szomszédságot határoznak meg. Ezt az eddig igazoltakkal összevetve adódik, hogy

$$\sum_{i=1}^{n}(x_i - 1) + \sum_{j=1}^{m}(y_j - 1) \leq S \leq \frac{3}{2}K - 2,$$

$$2K = \sum_{i=1}^{n} x_i + \sum_{j=1}^{m} y_j \leq n + m + \frac{3}{2}K - 2, \quad \text{amiből} \quad K \leq 2n + 2m - 4.$$

Tehát amennyiben teljesül a feladat feltétele, akkor legfeljebb $2n + 2m - 4$ darab korong helyezhető el a táblázatban. 2 pont

Összesen 7 pont