OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2021. november — A versenybizottság

1. feladat

Egy valós együtthatós másodfokú polinom minden egész helyen páratlan egész értéket vesz fel. Következik-e ebből, hogy egész együtthatós?

Első megoldás: Legyen a polinom $f(x) = ax^2 + bx + c$. Ekkor $f(0) = c$ páratlan egész szám, (1 pont)

ezért a $g(x) = ax^2 + bx$ polinom minden egész helyen páros egész értéket vesz föl. (2 pont)

Így $g(1) = a + b$ és $g(2) = 4a + 2b$ is páros egész számok. (1+1 pont)

De akkor $g(2)/2 = 2a + b$ is egész, (1 pont)

ezért $a = g(2)/2 - g(1)$, és így $b = g(1) - a$ is egészek. Tehát a feltételekből következik, hogy a polinom egész együtthatós. (1 pont)

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

Második megoldás: Azt fogjuk igazolni, hogy a feltételekből következik, hogy a polinom egész együtthatós. Ha a kérdéses polinom $f(x)$, akkor az $f(x) - 1$ polinom minden egész helyen páros egész értéket vesz föl. (2 pont)

Közismert, hogy ha egy polinom minden egész helyen egész értéket vesz föl, akkor binomiális együtthatók egész együtthatós lineáris kombinációja. Mivel f másodfokú, ezért

$$\big(f(x) - 1\big)/2 = a\binom{x}{2} + b\binom{x}{1} + c\binom{x}{0},$$

ahol a, b, c egész számok. (3 pont)

Az egyenlőségből f-et kifejezve:

$$f(x) = ax(x - 1) + 2bx + 2c + 1 = ax^2 + (2b - a)x + (2c + 1),$$

így f valóban egész együtthatós. (2 pont)

2. feladat

Legyen P az ABC háromszög belső pontja. Bizonyítsuk be, hogy a PAB, PBC, PCA szögek összege nagyobb a háromszög legkisebb szögénél.

Megoldás: Feltehető, hogy a P pont távolsága a C csúcstól legalább akkora, mint az A és a B csúcsoktól mért távolsága. (2 pont)

A PBC háromszögben $PB \leq PC$, így $PBC\sphericalangle \geq PCB\sphericalangle$. (2 pont)

Ezt felhasználva

$$PAB\sphericalangle + PBC\sphericalangle + PCA\sphericalangle > PBC\sphericalangle + PCA\sphericalangle \geq PCB\sphericalangle + PCA\sphericalangle = BCA\sphericalangle,$$ (2 pont)

aminél a háromszög legkisebb szöge biztosan nem nagyobb. (1 pont)

3. feladat

Egy pozitív egész n számot *teljes hatványnak* hívunk, ha $n = a^b$ valamely $a \geq 1$, $b \geq 2$ egészekre. Nevezzük a pozitív egész n számot *majdnem teljes hatványnak*, ha n mindegyik p prímosztójára n/p teljes hatvány. Igaz-e, hogy minden pozitív egésznek létezik majdnem teljes hatvány többszöröse?

Megoldás: Azt fogjuk igazolni, hogy minden pozitív egésznek létezik majdnem teljes hatvány többszöröse. Tekintsünk egy tetszőleges k pozitív egész számot, és vegyük a prímtényezős felbontását:

$$k = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_r^{\alpha_r},$$

itt tehát $p_1, p_2, \dots, p_r$ különböző prímtényezők. Keressük a majdnem teljes hatvány többszöröst

$$n = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_r^{\beta_r}$$

alakban, ahol minden i-re $\beta_i \geq \alpha_i$ teljesül, ezzel garantálva, hogy k valóban az n szám többszöröse. (1 pont)

Az n szám prímosztói is $p_1, p_2, \dots, p_r$, és p_i-re $(1 \leq i \leq r)$ akkor teljesül a megadott feltétel, ha

$$n/p_i = p_1^{\beta_1} p_2^{\beta_2} \dots p_{i-1}^{\beta_{i-1}} p_i^{\beta_i - 1} p_{i+1}^{\beta_{i+1}} \dots p_r^{\beta_r}$$

teljes hatvány, ami teljesül, ha a $\beta_1, \ldots, \beta_{i-1}, \beta_i - 1, \beta_{i+1}, \ldots, \beta_r$ kitevőknek van 1-nél nagyobb közös osztója. (1 pont)

Olyan β_i értékeket keresünk, melyekre p_i egy ilyen közös osztó, ekkor n/p_i egy p_i-edik hatvány lesz. Legyen

$$\beta_i = (\alpha_i + t_i)p_1p_2 \ldots p_{i-1}p_{i+1} \ldots p_r,$$

ahol $0 \leq t_i < p_i$ értékét úgy választjuk meg, hogy a β_i szám p_i-vel osztva 1 maradékot adjon. Sorra behelyettesítve a $t_i = 0, 1, \ldots, p-1$ értékeket mindig különböző maradékot kapunk, hiszen két ilyen szám különbsége $cp_1p_2 \ldots p_{i-1}p_{i+1} \ldots p_r$ alakú valamely $0 < c < p_i$ mellett, vagyis p_i-vel nem osztható. Van tehát (pontosan egy) olyan választás $0 \leq t_i < p_i$ értékére, melyre a $\beta_i = (\alpha_i + t_i)p_1p_2 \ldots p_{i-1}p_{i+1} \ldots p_r$ szám 1 maradékot ad p_i-vel osztva, rögzítsük β_i értékét így. (3 pont)

Ekkor egyrészt minden i-re $\alpha_i \leq \beta_i$, másrészt

$$n/p_i = p_1^{\beta_1} \ldots p_{i-1}^{\beta_{i-1}} p_i^{\beta_i - 1} p_{i+1}^{\beta_{i+1}} \ldots p_r^{\beta_r}$$

teljes hatvány, hiszen prímtényezős felbontásában minden kitevő osztható p_i-vel. (2 pont)

Megjegyzések.
1. A kis Fermat-tétel szerint

$$\beta_i = \alpha_i p_1 \ldots p_r + (p_1 \ldots p_{i-1}p_{i+1} \ldots p_r)^{p_i - 1}$$

megfelelő választás, hiszen a β_i kitevő 1 maradékot ad p_i-vel osztva, a másik $r-1$ prímtényezővel pedig osztható. (Itt az $\alpha_i p_1 \ldots p_r$ összeadandó szerepe csupán $\alpha_i \leq \beta_i$ garantálása.)

2. A kínai maradéktétel szerint létezik (pontosan egy) olyan maradékosztály modulo $p_1p_2 \ldots p_r$, melynek elemei 1 maradékot adnak p_i-vel osztva, a $p_1, \ldots, p_{i-1}, p_{i+1}, \ldots, p_r$ prímekkel pedig oszthatók. A β_i kitevőre ezen maradékosztály bármely α_i-nél nem kisebb eleme megfelelő választás.

4. feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges x, y, z pozitív valós számokra

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{(xyz)^2}.$$

Első megoldás: Első lépésben az egyenlőtlenség bal oldalán álló kifejezést különbséggé alakítjuk. Mivel

$$(x+y)(y+z) = (xy + yz + zx) + y^2$$

és

$$y^2(z+x) = y(yz+xy) = y(xy+yz+zx) - xyz,$$

azért

$$(x+y)(y+z)(z+x) = (xy+yz+zx)(x+y+z) - xyz. \qquad \text{(3 pont)}$$

Ez alapján az egyenlőtlenség bal oldala a következőképpen alakítható át:

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{x+y+z} = xy + yz + zx - \frac{xyz}{x+y+z}. \qquad \text{(1 pont)}$$

Most megmutatjuk, hogy az iménti különbségre érvényes a bizonyítandó alsó becslés. A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget az x, y, z, valamint az xy, yz, zx számhármasokra alkalmazva:

$$\frac{x+y+z}{3} \geq \sqrt[3]{xyz},$$

és

$$\frac{xy+yz+zx}{3} \geq \sqrt[3]{(xy)(yz)(zx)} = \sqrt[3]{(xyz)^2}. \qquad (2 \text{ pont})$$

Ebből már közvetlenül adódik, hogy a bizonyítandó egyenlőtlenség valóban teljesül:

$$xy+yz+zx - \frac{xyz}{x+y+z} \geq 3\sqrt[3]{(xyz)^2} - \frac{xyz}{3\sqrt[3]{xyz}} = \frac{8}{3}\sqrt[3]{(xyz)^2}. \qquad (1 \text{ pont})$$

Megjegyzés: Egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha a számtani és mértani közepek közötti becsléseinknél egyenlőség teljesül, vagyis, ha $x = y = z$.

Második megoldás: A bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens azzal, hogy

$$6xyz + 3xy^2 + 3yx^2 + 3xz^2 + 3zx^2 + 3zy^2 + 3yz^2 \geq 8x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} + 8y^{\frac{5}{3}}x^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}} + 8z^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}x^{\frac{2}{3}}$$

teljesül tetszőleges x, y, z pozitív valós számokra. (1 pont)

A számtani és mértani közepekre vonatkozó egyenlőtlenség szerint

$$\frac{6xyz + 8x^2y + 8x^2z + y^2x + z^2x}{24} \geq \left[(xyz)^6 \cdot \left(x^2y\right)^8 \cdot \left(x^2z\right)^8 \cdot y^2x \cdot z^2x\right]^{\frac{1}{24}} = x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}},$$

és így

$$\frac{6xyz + 8x^2y + 8x^2z + y^2x + z^2x}{3} \geq 8x^{\frac{5}{3}}y^{\frac{2}{3}}z^{\frac{2}{3}}. \qquad (4 \text{ pont})$$

Ciklikus átbetűzéssel felírva a másik két analóg egyenlőtlenséget, majd a három egyenlőtlenséget összeadva, éppen a bizonyítandót kapjuk. (2 pont)

Harmadik megoldás: Vezessük be az $a = x + y,\ b = y + z,\ c = z + x$ változókat. Ekkor $x = (c + a - b)/2,\ y = (a + b - c)/2,\ z = (b + c - a)/2$. Mivel x, y, z pozitívak, ezért a, b, c szintén pozitív számok és kielégítik a háromszög-egyenlőtlenséget, így a, b, c egy háromszög három oldalának tekinthető.

Ha a szokásos jelöléssel s a háromszög félkerülete, akkor $x + y + z = s$, valamint $x = s - b,\ y = s - c,\ x = s - a$. Az új változókkal kifejezve az állítás az

$$abc \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{s^3(s-a)^2(s-b)^2(s-c)^2}$$

alakba írható. (1 pont)

Tudjuk, hogy $s(s-a)(s-b)(s-c) = t^2$, ahol t a háromszög területe, ezért tovább alakítva

$$abc \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{st^4}.$$

Felhasználva, hogy $t = abc/4R$, ahol R a körülírt kör sugara, a bal oldalt is fejezzük ki a területtel:

$$4tR \geq \frac{8}{3}\sqrt[3]{st^4},$$

$$\frac{3R}{2} \geq \sqrt[3]{st},$$

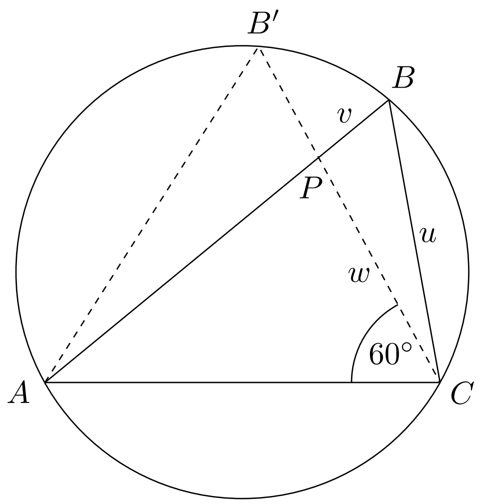
$$\frac{27R^3}{8} \geq st.$$

Elegendő tehát belátnunk, hogy ez minden háromszögben teljesül. (2 pont)

Ehhez megmutatjuk, hogy az R sugarú körbe írt háromszögek közül mind a területe, mind a kerülete a szabályos háromszögnek a legnagyobb, vagyis a félkerület legfeljebb $\frac{3\sqrt{3}}{2}R$, a terület pedig legfeljebb $\frac{3\sqrt{3}}{4}R^2$, ahonnan valóban

$$st \leq \frac{3\sqrt{3}}{2}R \cdot \frac{3\sqrt{3}}{4}R^2 = \frac{27}{8}R^3. \qquad \text{(1 pont)}$$

Legyenek tehát az R sugarú körbe írt nem szabályos ABC háromszög szögei $\alpha \leq \beta \leq \gamma$, ahol $\alpha < 60° < \gamma$. Megmutatjuk, hogy az R sugarú körbe írható szabályos háromszöghöz a terület és a kerület növelésével juthatunk.



Rögzítsük a körön az A és C csúcsokat, és mozgassuk a (hegyesszögű) B csúcsot az AC egyenestől távolodva (ekkor α növekszik, γ pedig csökken) addig, amíg α vagy γ nagysága $60°$ nem lesz. Mivel az AC alaphoz tartozó magasság nőtt, az így kapott $AB'C$ háromszög területe nyilván nagyobb lett. (1 pont)

Belátjuk, hogy a kerület is nőtt, azaz $AB' + B'C > AB + BC$. Legyen ugyanis AB és CB' metszéspontja P. Ekkor egyenlő kerületi szögek alapján $AB'P\triangle \sim CBP\triangle$. Ha $CBP\triangle$ oldalai u, v, w, akkor $AB'P\triangle$ oldalai rendre $\lambda u, \lambda v, \lambda w$, ahol $\lambda > 1$. A bizonyítandó állítás így $\lambda u + (\lambda v + w) > (\lambda w + v) + u$, vagyis $\lambda(u + v - w) > u + v - w$, ami teljesül, hiszen a háromszög-egyenlőtlenség szerint $u + v - w > 0$.

Rögzítsük most a $60°$-os szöggel szemközti oldal végpontjait a körön, és mozgassuk a $60°$-os szög csúcsát, amíg a szabályos háromszöghöz jutunk. A terület és a kerület a fentiek alapján ismét növekszik. (2 pont)

5. feladat

Van-e olyan tetraéder, amelyben a lapok köré írt körök középpontjai egy egyenesre illeszkednek?

Első megoldás: Azt fogjuk megmutatni, hogy ilyen tetraéder nem létezik. Legyenek az $ABCD$ tetraéderben a csúcsokkal szemközti lapok köré írt körök középpontjai rendre O_A, O_B, O_C és O_D, és indirekt módon tegyük fel, hogy ez a négy pont kollineáris.

A négy pont közül kettő csak akkor eshet egybe, ha a tetraédernek arra az élegyenesére illeszkedik, amely a szóban forgó két lapsík metszésvonala. Ilyenkor ennek a két lapnak derékszögű háromszögnek kell lennie, amelyek közös átfogójuk mentén csatlakoznak, és a két egybeeső középpont ennek a tetraéderélnek a felezőpontja. (2 pont)

Ezért a négy körközéppont közül kettőnél több nem eshet ugyanabba a pontba, és így az az egyenes, amely tartalmaza őket, egyértelműen létezik. Jelöljük ezt az egyenest e-vel. (1 pont)

A továbbiakban két térbeli egyenest merőlegesnek nevezünk, ha irányvektoraik merőlegesek (vagyis nem ragaszkodunk ahhoz, hogy a két egyenes metssze egymást, lehetnek kitérők is). Két egyenes merőlegessége azzal egyenértékű, hogy valamelyikük (illetve ezzel ekvivalens módon bármelyikük) benne fekszik egy a másikra merőleges síkban.

Ha kiszemeljük a tetraéder bármelyik élét, akkor az erre illeszkedő két lap köré írt körök középpontjai benne vannak a szóban forgó él felező merőleges síkjában. Ezért ha ez két különböző pont, akkor a teljes e egyenes benne fekszik ebben a síkban, vagyis e merőleges ennek az élnek az egyenesére. Tehát ha például $O_A \neq O_B$, akkor $e \perp CD$. (1 pont)

Mivel a középpontok közül egyszerre kettőnél több nem eshet egybe (vagyis a legtöbb egybeesés, ami elvileg előfordulhat, két-két középpont egybeesése lehet), a tetraéder hat éle közül legalább négy ilyen módon merőleges az e egyenesre. (1 pont)

Akárhogyan választunk is ki legalább négyet a tetraéder hat éle közül, az így kapott gráf összefüggő, és a tetraéder mindegyik csúcsát tartalmazza. Ha mindegyik ilyen él egy-egy e-re merőleges síkban fekszik, akkor a gráf összefüggő volta miatt ennek a négy síknak egybe kell esnie. Így viszont a tetraéder mindegyik csúcsa egy síkban van, ami lehetetlen. (2 pont)

Megjegyzés: Valójában az sem fordulhat elő, hogy O_A, O_B, O_C és O_D közül kettő-kettő egybeessen: könnyű meggondolni, hogy az egybeesés csakis a tetraéder köré írható gömb középpontjában valósulhat meg, tehát nem fordulhat elő egynél többször.

Második megoldás: A tetraéder lapjainak körülírt körei illeszkednek a tetraéder köré írható gömbre. (A körök középpontja a gömb belsejében van.) Legyen O a gömb középpontja, és legyen P egy O-tól különböző belső pont. Ekkor P pontosan egy gömbi kör középpontja: a P középpontú kör síkja az OP egyenesre P-ben állított merőleges sík. (2 pont)

Tegyük fel, hogy a lapok körülírt köreinek középpontjai egy e egyenesre illeszkednek.

Ha az e egyenes áthalad a gömb O középpontján, akkor legalább három lapnak O a középpontja, hiszen két O-tól különböző P_1 és P_2 lapközéppont esetén lenne a tetraédernek két párhuzamos lapsíkja, ami lehetetlen. (2 pont)

Három lapsík közös pontja azonban a tetraéder egyik csúcsa, amely nyilván nem eshet egybe a gömb középpontjával. (1 pont)

Ha az e egyenes nem halad át a középponton, akkor a középponttal együtt meghatároz egy S síkot. Ekkor mindegyik P lapközépponthoz tartozó OP egyenes az S síkban fekszik, ezért a tetraéder lapsíkjai valamennyien merőlegesek S-re. Mivel ez sem lehetséges, ellentmondásra jutottunk: a lapok köré írt körök középpontjai nem illeszkedhetnek egy egyenesre. (2 pont)