OKTATÁSI HIVATAL

A 2021/2022. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

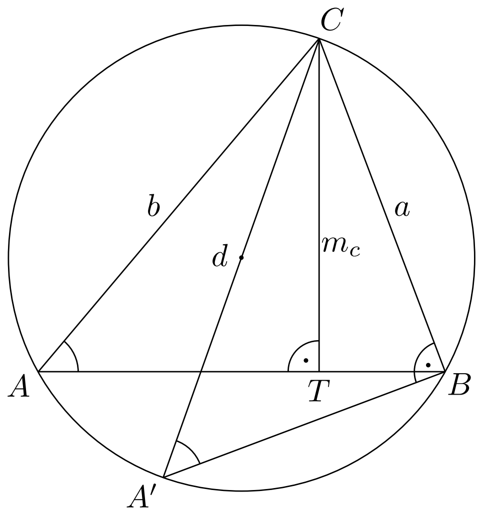
MEGOLDÁSOK

1. feladat

Egy körben válasszunk ki véges sok húrt, és színezzük őket pirosra vagy kékre olyan módon, hogy a kör bármelyik pontjába ugyanannyi piros húr fusson be, mint kék. Legyen P a kör egy tetszőleges pontja, és tekintsük P-nek a húrok egyeneseitől mért távolságait. Bizonyítsuk be, hogy a pirosakhoz tartozó távolságok szorzata egyenlő a kékekhez tartozók szorzatával.

Első megoldás:

Először egy háromszögekre vonatkozó segédállítást tisztázunk. Legyenek egy háromszög oldalai a, b, c, a c oldalhoz tartozó magasság m_c, és a háromszög körülírt körének az átmérője d. Azt állítjuk, hogy ekkor $ab = m_c d$.



Ez rögtön következik a jól ismert $t = \frac{abc}{2d}$ és $t = \frac{cm_c}{2}$ területképletek összevetéséből, de közvetlenül is belátható az ATC és $A'BC$ háromszögek hasonlóságát használva, ahol T a C-ből induló magasság talppontja, A' pedig a C-vel átellenes pont a körülírt körön.

Rátérünk a feladat megoldására. Legyenek A_1, A_2, $\ldots$, A_n a szóban forgó húrok végpontjai. Feltehetjük, hogy P nem esik egybe ezek egyikével sem, hiszen akkor a $0 = 0$ egyenlőséget kellene bizonyítanunk.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-21-A0002 projekt támogatja

Miniszterelnökség
Családokért Felelős Tárca Nélküli Miniszter

Nemzeti Tehetség Program

Vegyük észre először, hogy ugyanannyi piros húr van, mint kék, hiszen a feladat feltételéből következően összesen ugyanannyi végpontja kell, hogy legyen a piros húroknak, mint a kékeknek.

Jelölje a_i a PA_i távolságot, t_{ij} a P pont távolságát az A_iA_j egyenestől, és d a kör átmérőjét. A segédállítás szerint minden $i \neq j$-re $a_ia_j = t_{ij}d$, azaz $t_{ij} = \frac{a_ia_j}{d}$. Szorozzuk össze ezeket egyrészt minden olyan $i < j$ párra, amelyre A_iA_j piros húr, másrészt minden olyan $i < j$ párra, amelyre A_iA_j kék húr. Be kell látnunk, hogy ez a két szorzat egyenlő.

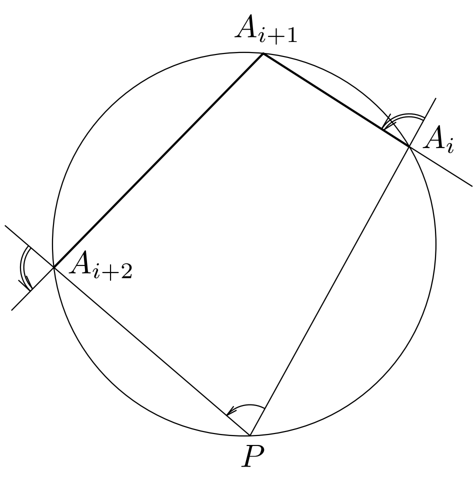
Mivel a piros és a kék húrok száma egyenlő, a két szorzat nevezőjében d ugyanakkora hatványon szerepel. Mindkét számláló az a_i számok bizonyos hatványainak a szorzata. A feladat feltétele alapján minden i-re a_i kitevője egyenlő a két szorzatban. Ezért a két szorzat valóban egyenlő.

Második megoldás:

Ciklusnak fogjuk nevezni a feladatban szereplő húroknak egy sorozatát, ha a felsorolás szerint szomszédosaknak (ideértve az utolsót és az elsőt is) az egyik végpontja közös, és felváltva következnek benne a piros és kék húrok (ideértve azt is, hogy az elsőnek és az utolsónak a színe eltérő). A húrok rendszerének egy tetszőleges tagjából kiindulva tudunk ciklust készíteni, hiszen a feladat feltétele garantálja, hogy ha még nem értünk vissza a kezdőpontba, mindig tudjuk a sorozatot az utolsótól eltérő színű, csatlakozó húrral folytatni. Ha a húrok rendszeréből egy ciklust elhagyunk, akkor – ha még maradt egyáltalán húr – a maradék húrok továbbra is kielégítik a feladat feltételeit. Ezzel beláttuk, hogy egy a feladat szerinti húrrendszert mindig elő tudunk állítani olyan ciklusok egyesítéseként, amelyek páronként nem tartalmaznak közös húrt. Emiatt elegendő a feladat állítását húrok olyan rendszerére bebizonyítani, amelyek ciklust alkotnak.

Legyenek egy ciklushoz tartozó húrok végpontjai a cikluson való végighaladás sorrendjében A_1, A_2, …, A_{2n} (ezek a pontok nem feltétlenül különbözők). Jelölje $i \leq 2n-1$-re t_i a P pont távolságát az A_iA_{i+1} egyenestől, t_{2n} pedig P távolságát az $A_{2n}A_1$ egyenestől. Bebizonyítjuk, hogy $t_1t_3 \dots t_{2n-1} = t_2t_4 \dots t_{2n}$.

Feltehetjük, hogy P nem esik egybe az A_i pontok egyikével sem, hiszen akkor a bizonyítandó egyenlőség mindkét oldalán egy-egy tényező 0. Legyen A_i, A_{i+1}, A_{i+2} a pontsorozat három egymást követő eleme. Itt megengedjük, hogy az i index $2n-1$ is lehessen, és olyankor a jelölést úgy értjük, hogy $A_{2n+1} = A_1$.



Tekintsük a síkon azt a P középpontú forgatva nyújtást, amely az A_i pontot az A_{i+2} pontba viszi. (Ilyen forgatva nyújtás egyértelműen létezik, szöge az A_iPA_{i+2} irányított szög, aránya a PA_{i+2}/PA_i távolságarány.) A kerületi szögek tétele folytán a PA_i és A_iA_{i+1} egyenesek irányított szöge egyenlő a PA_{i+2} és $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenesek irányított szögével (attól függetlenül, hogy a P pont az A_i, A_{i+1}, A_{i+2} pontok közti három ív melyikére esik). Ezért a forgatva nyújtás az A_iA_{i+1} egyenest az $A_{i+1}A_{i+2}$ egyenesre képezi. Emiatt a t_{i+1}/t_i arány a forgatva nyújtás arányával, vagyis PA_{i+2}/PA_i-vel egyenlő.

Ezeket az egyenlőségeket 1-től $(2n-1)$-ig minden páratlan i-re felírva és összeszorozva a

$$\frac{t_2}{t_1} \cdot \frac{t_4}{t_3} \cdot \ldots \cdot \frac{t_{2n}}{t_{2n-1}} = \frac{PA_3}{PA_1} \cdot \frac{PA_5}{PA_3} \cdot \ldots \cdot \frac{PA_1}{PA_{2n-1}}$$

képletet kapjuk, ahol a jobb oldalon egyszerűsítés után 1 áll. Ezért a bal oldalon a számlálók szorzata egyenlő a nevezők szorzatával, ami éppen a bizonyítandó állítás.

2. feladat

James Bond, a 007-es ügynök feladata egy csupa különböző ötjegyű számból álló titkos lista megszerzése, amit el kell juttatnia M-hez (a számok sorrendje nem számít, a listán legalább 10 és legfeljebb 100 szám van). Gyanús azonban, hogy a futár ellenséges ügynök, ezért Bond megváltoztatja a lista egyik számát úgy, hogy továbbra is ötjegyű, és a többitől különböző legyen. Meg tud-e Bond és M állapodni előzetesen (a titkos lista ismerete nélkül) olyan módszerben, mellyel a megváltoztatott listából M rekonstruálni tudja az eredetit?

Első megoldás:

Tekintsük az n elemű $X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ halmaz összes k elemű részhalmazát, ahol $1 \leq k < n$ (és $n \geq 2$). Megadunk rekurzívan egy eljárást, amely minden ilyen S részhalmazhoz egy k elemű $B(S) \subseteq X$ részhalmazt rendel úgy, hogy S-nek pontosan egy elemét változtatja meg, és kölcsönösen egyértelmű. Ekkor a B függvénynek van M inverze, amelyre $M\big(B(S)\big) = S$ teljesül minden S-re.

Ha Bond listája k elemű, akkor az $X = \{10000, 10001, \ldots, 99999\}$ halmaz k elemű részhalmazaira vonatkozó B eljárást alkalmazza, M pedig a megfelelő M inverz függvénnyel állítja helyre az eredeti listát.

A $B = B_{X,k}$ eljárást $|X|$ szerinti rekurzióval definiáljuk, ahol $|X| = n$ az X elemszáma. Legyen n a legkisebb szám, amire $B_{X,k}$ még nincs definiálva $(n \geq 2)$.

Ha $k = 1$, akkor rendelje B az $\{x_i\}$ halmazhoz $\{x_{i+1}\}$-et ha $i < n$, és $\{x_n\}$-hez $\{x_1\}$-et. Ha pedig $k = n - 1$, akkor az előző B függvényt alkalmazzuk a részhalmazunk komplementumára. Ezek a rekurzió kezdő esetei. Ha $n = 2$, akkor szükségképpen $k = 1$, tehát ekkor megvan a keresett eljárás.

Legyen $n \geq 3$, feltehetjük, hogy $2 \leq k < n - 1$. Bontsuk az X halmaz k elemű részhalmazait két csoportba aszerint, hogy az x_n-et tartalmazzák-e vagy sem.

Amelyek nem tartalmazzák, azok $X' = \{x_1, \ldots, x_{n-1}\}$ részhalmazai. Ezekre alkalmazhatjuk a $B_{X',k}$ eljárást, mert $|X'| < |X|$.

A többi részhalmazból dobjuk ki x_n-et, és erre alkalmazzuk a $B_{X',k-1}$ eljárást, majd tegyük vissza x_n-et. Ez is lehetséges, mert $|X'| < |X|$. Ezzel megkaptuk a keresett $B_{X,k}$ függvényt.

Megjegyzés: A B kódolási eljárás igazából explicit, és elég gyors. Az alábbi kódolás helyessége a fenti indukció végigkövetésével ellenőrizhető. Az egyszerűbb jelölés kedvéért legyen $X = \{1, 2, \ldots, n\}$, és S elemei $a_1 < a_2 < \ldots < a_k$.

1. Ha $a_2 > 3$, akkor a_1-et $a_1 + 1$-re módosítjuk, kivéve, ha $a_1 + 1 = a_2$, ekkor a_1 helyett 1-et írunk.

2. Ha $a_2 \leq 3$, akkor keressük meg a legnagyobb olyan i indexet, amelyre még $a_i \leq i+1$ (szükségképpen $i \geq 2$). Ekkor $\{a_1, a_2, \ldots, a_i\}$ az $\{1, 2, \ldots, i+1\}$ halmaz egy i elemű részhalmaza, vagyis egy m szám marad ki. Ekkor m-et betesszük, és kivesszük $m + 1$-et, kivéve ha $m + 1 = i + 2$, ebben az esetben az 1-et vesszük ki. (Az m-et be szabad tenni, mert $m \leq i + 1 < a_{i+1}$, valójában $a_{i+1} \geq i + 3$).

Példák: $1, 2, 3, 5, 6, 8 \mapsto 1, 2, 3, 4, 6, 8$; $\quad 1, 2, 3, 4, 5, 8 \mapsto 2, 3, 4, 5, 6, 8$;
$1, 2 \mapsto 2, 3$; $\quad 1, 3 \mapsto 1, 2$; $\quad 2, 3 \mapsto 1, 3$; $\quad 1, 4 \mapsto 2, 4$; $\quad 2, 4 \mapsto 3, 4$; $\quad 3, 4 \mapsto 1, 4$.

Második megoldás:

Az első megoldásban használt jelöléseket alkalmazzuk. Készítsünk egy $G = G_{X,k}$ gráfot, melynek csúcsai az X halmaz k elemű részhalmazai, és húzzunk irányított élet mindkét irányba két részhalmaz között, ha pontosan egy számban különböznek.

A keresett B függvényből készítsük el azt az irányított részgráfot, amelynek élei S-ből $B(S)$-be vezetnek minden S részhalmazra. Ezek azok az irányított részgráfok, melyekben minden csúcsból pontosan egy él indul és egy él érkezik, továbbá minden csúcsot tartalmaznak. Nevezzük az ilyeneket *jó* részgráfnak. Megfordítva, minden jó részgráf egy megfelelő B függvényt ad.

Segédállításként belátjuk, hogy egy irányított, hurok- és többszörös élek nélküli G gráfnak pontosan akkor van jó részgráfja, ha a csúcsok bármely H részhalmazára teljesül, hogy a H-ból induló összes él végpontjai legalább annyian vannak, mint a H elemszáma. (Az oda- és visszaél két pont között megengedett egyszerre.)

A feltétel nyilván szükséges, hiszen csupán a jó részgráf éleit számba véve is teljesül. A megfordításhoz készítünk egy páros gráfot a következőképpen. Duplikáljuk G csúcshalmazát, legyenek ezek A és B. Minden G-beli xy irányított élhez húzzuk be az A-beli x pontból a B-beli y-ba vezető élt. Ekkor a Kőnig–Hall-tétel miatt van A-t lefedő teljes párosítás. Ennek élei az eredeti gráfban a kívánt jó részgráfot alkotják. Ezzel a segédállítást beláttuk.

Tekintsük most a részhalmazokból származó $G = G_{X,k}$ gráfot. Ez reguláris, azaz minden pont kifoka és befoka is ugyanaz az $m = k(n-k)$ szám. Az $1 \leq k < n$ feltétel miatt $m > 0$. Ha a csúcsok egy H részhalmazából induló élek végpontjainak a halmaza K, akkor összesen $|H|m$ élet tekintünk. Mivel K-ba az egész gráfból összesen $|K|m$ él érkezik, ezért $|H|m \leq |K|m$. Innen $m \neq 0$ miatt $|H| \leq |K|$.

Megjegyzés: A megoldást elmondhattuk volna irányítatlan gráfokkal is: amikor két olyan halmazt, amelyek csak egy számban különböznek, irányítatlan éllel kötünk össze. Ekkor jó részgráfnak az olyat nevezhetjük, amely minden csúcsot tartalmaz, és diszjunkt körök valamint élek uniója. Könnyű meggondolni, hogy az ilyen részgráf létezése a fenti fokszám-feltétellel jellemezhető. Ez a megoldásban bizonyított segédállításból következik, ha minden irányítatlan élet helyettesítünk egy oda-vissza menő irányított élpárral.

3. feladat

Tekintsük az összes olyan kétváltozós, egész együtthatós $f(x, y)$ polinomot, amelyre $f(x, y) = f(y, x)$ azonosság, továbbá $f(m, n) = 0$ minden olyan m és n egészekre, melyekre $0 \leq m, n \leq 2021$. Az $f(2022, 2022)$ értékek között mi a legkisebb pozitív, ha f befutja az összes ilyen polinomot?

Első megoldás:

Megmutatjuk, hogy a feladat kérdésére a válasz $2 \cdot 2022!$. Ez nyilván elérhető az

$$x(x-1)(x-2)\dots(x-2021) + y(y-1)(y-2)\dots(y-2021)$$

polinommal.

Nevezzünk egy $f(x, y)$ polinomot *szimmetrikusnak*, ha teljesül az $f(x, y) = f(y, x)$ azonosság, továbbá *k-jónak* ($k \geq 0$ egész), ha egész együtthatós, szimmetrikus, és $f(m, n) = 0$ minden olyan m és n egészre, melyekre $0 \leq m, n \leq k$. Belátjuk k szerinti indukcióval, hogy ha $k \geq 1$ és az $f(x, y)$ polinom k-jó, akkor $f(k + 1, k + 1)$ osztható $2 \cdot (k + 1)!$-sal. Ez a $k = 2021$ esetben a feladat állítását eredményezi.

Legyen $f(x, y)$ szimmetrikus polinom, és

$$g(x, y) = f(x, y) - f(x, 0) - f(0, y) + f(0, 0)\,.$$

Ekkor $g(x, y)$ is szimmetrikus, és minden tagjában szerepel x és y is (hiszen kiesnek a cx^t és a dy^s alakú tagok, ideértve a konstans tagot is). Ezért $g(x, y) = xyh(x, y)$ alkalmas egész együtthatós h polinomra, ami szintén szimmetrikus.

Tegyük föl, hogy az $f(x, y)$ polinom k-jó. Ha $1 \leq m, n \leq k$ egész számok, akkor a fenti képlet szerint $g(m, n) = 0$. Ezért $h(m, n) = 0$, hiszen $m, n \neq 0$. Így a $h(x + 1, y + 1)$ polinom $(k - 1)$-jó. Ez az észrevétel a k szerinti indukció alapja, és érvényes minden $k \geq 1$ esetén.

A feltétel szerint az $f(x, 0)$ polinomnak gyökei a $0, 1, \dots, k$ számok, ezért felírható $f(x, 0) = x(x-1)\dots(x-k)u(x)$ alakban, ahol $u(x)$ egész együtthatós polinom. Mivel $f(x, y)$ szimmetrikus, a két változót megcserélve, majd x helyére y-t írva azt kapjuk, hogy $f(0, y) = y(y - 1)\dots(y - k)u(y)$. Végül $f(0, 0) = 0$, ezért

$$f(x, y) = x(x - 1)\dots(x - k)u(x) + y(y - 1)\dots(y - k)u(y) + xyh(x, y).$$

Innen $f(k + 1, k + 1) = 2(k + 1)!u(k + 1) + (k + 1)^2h(k + 1, k + 1)$.

Ha $k = 1$, akkor $f(2, 2) = 4u(2) + 4h(2, 2)$, ami 4-gyel, vagyis $2 \cdot (k + 1)!$-sal osztható. Az indukciós lépés bizonyításához tegyük fel, hogy az állítás igaz $k - 1 \geq 1$-re. Láttuk, hogy a $h(x+1, y+1)$ polinom $(k-1)$-jó, ezért az indukciós feltevés szerint ide $x = y = k - 1 + 1 = k$-t helyettesítve az eredmény, vagyis $h(k + 1, k + 1)$ osztható $2 \cdot k!$-sal. Így $f(k+1, k+1) = 2(k+1)!u(k+1)+(k+1)^2h(k+1, k+1)$ tényleg osztható $2\cdot(k+1)!$-sal.

Megjegyzések: Ha az $f(x, y)$ polinom k-jó, akkor $f(x, x)$-nek gyöke $0, 1, \dots, k$, ezért kiemelhető belőle $x(x-1)\dots(x-k)$. Ezért $f(k+1, k+1)$ osztható $(k+1)!$-sal. Tehát már ennyiből (és a megoldás első bekezdéséből) is látszik, hogy a feladat kérdésére a válasz vagy $2022!$, vagy ennek a kétszerese.

Ha $k = 0$, akkor az indukciós állítás nem igaz: az $f(x, y) = x + y - xy$ polinom 0-jó, de $f(1, 1) = 1$ nem osztható $2 \cdot 1! = 2$-vel.

Második megoldás:

Az előző megoldás első bekezdése alapján most is elegendő megmutatni, hogy $2 \cdot 2022!$ osztója $f(2022, 2022)$-nek.

Vezessük be a

$$p_{i,j}(x, y) = x(x-1)(x-2)\dots(x-i+1)y(y-1)(y-2)\dots(y-j+1)$$

jelölést. Itt $i, j \geq 0$, és $p_{0,0}(x, y) = 1$. Megmutatjuk, hogy minden kétváltozós, egész együtthatós $f(x, y)$ polinom felírható $\sum c_{i,j}p_{i,j}(x, y)$ alakban alkalmas $c_{i,j}$ egészekkel.

Az $f(x, y)$ polinom $b_{i,j}x^iy^j$ alakú tagok összege, ahol $b_{i,j}$ egész szám. E tag fokán értsük az $i+j$ számot. Legyen d a legmagasabb fokszám, ami f-ben (nem nulla együtthatóval) előfordul. Mivel $p_{i,j}(x, y)$-ban az egyetlen $i + j$ fokú tag x^iy^j, és minden más tag foka ennél kisebb, ezért a

$$g(x, y) = f(x, y) - \sum_{i=0}^{d} b_{i,d-i}p_{i,d-i}(x, y)$$

polinomból kiesik az összes d fokú tag. Az eljárást folytatva sorban a $d-1, d-2, \dots$ fokú tagokkal az $f(x, y)$ kívánt felírását kapjuk.

Ha $f(x, y)$ szimmetrikus, vagyis teljesül az $f(x, y) = f(y, x)$ azonosság, akkor minden i, j-re $b_{i,j} = b_{j,i}$. Belátjuk, hogy ekkor $c_{i,j} = c_{j,i}$ is teljesül minden i, j-re. Ha $i + j = d$, akkor ez igaz, hiszen a fenti képlet szerint ilyenkor $c_{i,j} = b_{i,j}$, és az alacsonyabb fokú tagok ezt nem ronthatják el később sem. De a $g(x, y)$ polinom is szimmetrikus, ezért az eljárás következő lépéseiben is teljesül a $c_{i,j} = c_{j,i}$ összefüggés a legnagyobb fokú tagok együtthatóira.

Legyen $f(x, y)$ egy olyan polinom, ami megfelel a feladat feltételeinek, és

$$f(x, y) = \sum c_{i,j}p_{i,j}(x, y)\,.$$

A $p_{i,j}$ definíciója miatt $p_{i,j}(m, n) = 0$ minden olyan m és n egészre, melyre $0 \leq m < i$ vagy $0 \leq n < j$. Az $f(0, 0) = 0$ feltétel ezért azt adja, hogy $c_{0,0} = 0$. Innen $f(0, 1) = 0$ miatt $c_{0,1} = 0$. Hasonlóan, $f(1, 0) = 0$ miatt $c_{1,0} = 0$. Tovább haladva és $i + j$ értékét egyesével növelve látjuk, hogy $c_{i,j} = 0$ minden olyan esetben, amikor $0 \leq i, j \leq 2021$.

Tudjuk azonban azt is, hogy ha i és j valamelyike nagyobb, mint 2022, akkor $p_{i,j}(2022, 2022) = 0$. Ezért végül is

$$\begin{aligned} f(2022, 2022) = {} & c_{2022,2022}p_{2022,2022}(2022, 2022) + \\ & + \sum_{i=0}^{2021} c_{i,2022}p_{i,2022}(2022, 2022) + c_{2022,i}p_{2022,i}(2022, 2022)\,. \end{aligned}$$

Nyilván $p_{2022,2022}(2022, 2022) = (2022!)^2$, ami osztható $2 \cdot 2022!$-sal (hiszen $2022 > 1$). De $c_{i,2022} = c_{2022,i}$, és $p_{i,2022}(2022, 2022) = p_{2022,i}(2022, 2022) = (2022!)^2/(2022-i)!$, ezért az összeg többi tagja $2c_{i,2022}(2022!)^2/(2022-i)!$ alakú, és ezek is oszthatók $2 \cdot 2022!$-sal.

Megjegyzés: Az előző megjegyzésben láttuk, hogy 2022 helyett 1-re tekintve a feladatot az $x + y - xy$ polinom ellenpélda. Ez a polinom a második megoldás jelöléseivel $p_{0,1}(x, y) + p_{1,0}(x, y) - p_{1,1}(x, y)$, és $p_{1,1}(1, 1) = (1!)^2$, ami nem osztható $2 \cdot 1!$-sal.