OKTATÁSI HIVATAL

**A 2022/2023. tanévi**
**Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny**
**első forduló**

# MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

**(gimnázium)**

**Javítási-értékelési útmutató**

**1. feladat** (a) Igazoljuk, hogy az

$$n = 2020^2 + 2021^2 + 2022^2 + 2023^2$$

számot fel lehet írni három négyzetszám összegeként.

(b) Fel lehet-e írni $n$-et három páros szám négyzetének összegeként?

**Megoldás:** (a) Legyen $a = 2020$. Ekkor

$$n = 2020^2 + 2021^2 + 2022^2 + 2023^2 = a^2 + (a+1)^2 + (a+2)^2 + (a+3)^2.$$ 2 pont

Ezt tovább alakítva fel tudjuk írni $n$-et a kívánt alakban:

$$n = 4a^2 + 12a + 14 = (4a^2 + 12a + 9) + 4 + 1 = (2a+3)^2 + 2^2 + 1^2.$$ 2 pont

(b) Kiderült, hogy $n = 4a^2 + 12a + 14 = 4(a^2 + 3a + 3) + 2$, tehát az $n$ szám 4-es maradéka 2. 1 pont

Ha egy tetszőleges $2k$ páros számot négyzetre emelünk, $4k^2$-et, azaz néggyel osztható számot kapunk. Tehát három páros négyzetszám összege is néggyel osztható lesz, így $n$ nem írható fel a kívánt alakban. 2 pont

**Összesen: 7 pont**

**2. feladat** Határozzuk meg az alábbi összeg pontos értékét (a nevezőkben levő kitevők egyesével növekednek $-2022$-től 2022-ig):

$$\frac{1}{1+2^{-2022}} + \frac{1}{1+2^{-2021}} + \frac{1}{1+2^{-2020}} + \ldots + \frac{1}{1+2^{2022}}.$$

**Megoldás:** Párosával adjuk össze azokat a tagokat, amelyekben a nevezőben szereplő kettőhatvány kitevőjének abszolút értéke azonos. 2 pont

Legyen $b$ pozitív egész, $b < 2023$:

$$\frac{1}{1+2^{-b}} + \frac{1}{1+2^{b}} = \frac{2^b}{1+2^b} + \frac{1}{1+2^b} = 1.$$ 3 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

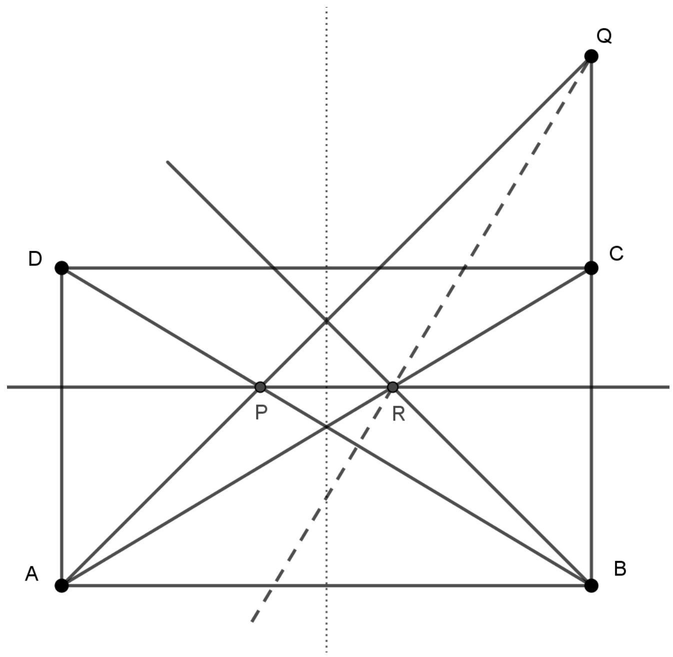
A feladatban szereplő összegben 2022 ilyen pár van, továbbá egy olyan tört, aminek nevezőjében a kettő kitevője éppen 0. Így az összeg értéke:

$$2022 + \frac{1}{1+2^0} = 2022,5. \qquad 2 \text{ pont}$$

**Összesen: 7 pont**

**3. feladat** Az $ABCD$ téglalap $BAD\angle$ szögének szögfelezője a $BD$ átlót a $P$, a $BC$ oldal egyenesét a $Q$ pontban metszi. A $P$ ponton átmenő, $AB$-vel párhuzamos egyenes az $AC$ átlót $R$ pontban metszi. Bizonyítsuk be, hogy a $QR$ egyenes merőleges a $BD$ átlóra.

**Megoldás:** Felhasználjuk, hogy minden háromszögben a három magasságvonal egyenese a magasságponton megy át. Megmutatjuk, hogy $R$ a $BPQ$ háromszög magasságpontja.




Mivel $ABCD$ téglalap, így szomszédos oldalai merőlegesek egymásra. Ezért az $AB$-vel párhuzamos $PR$ egyenes merőleges a $BC$ egyenesre. Így $PR$ a $BPQ$ háromszög $P$-ből induló magagasságvonalának egyenese. 1 pont

Az $ABCD$ téglalap és az $AB$-vel párhuzamos $PR$ egyenes is szimmetrikus az $AB$ szakasz felezőmerőlegesére. Tükrözzük erre a felezőmerőlegesre a $P$ pontot, legyen képe $P'$. Mivel $P$ rajta van a $BD$ átlón, ezért $P'$ rajta van $BD$ tükörképén, azaz $AC$-n. Másrészt $P$ rajta van az $AB$-vel párhuzamos $PR$ egyenesen, ezért $P'$ is rajta van ezen az egyenesen. Azt kaptuk, hogy $P'$ a $PR$ egyenes és $AC$ metszéspontja, azaz $P' = R$. 2 pont

Az $AB$ felezőmerőlegesére tükrözve $AP$ képe $BP' = BR$ és így $BR$ az $ABC\angle$ szögfelezője. Mivel az $ABCD$ téglalap minden szöge derékszög, ezért a szomszédos csúcsoknál levő $AP$ és $BR$ szögfelezők egymásra merőlegesek. Így $BR$ a $BPQ$ háromszög $B$-ből induló magasságvonalának egyenese. 2 pont

$PR$ és $BR$ a $BPQ$ háromszög két magasságvonala, ezek a magasságpontban metszik egymást, ezért $R$ a $BPQ$ háromszög magasságpontja. Tehát $QR$ a harmadik magasságvonal egyenese, ami pedig merőleges a $BP$-re, ami éppen a $BD$ átló egyenese. 2 pont

**Összesen: 7 pont**

A feladatra sokféle megoldás adható. Amennyiben a versenyző koordinátageometriával dolgozik, pontozás a következő: a téglalap csúcsainak elhelyezése 1 pont; $AP$ egyenese 1 pont; $P$ pont meghatározása 1 pont; $Q$ pont meghatározása 1 pont; $R$ pont meghatározása 1 pont; $QR$ és $BD$ egyenesek merőlegesek 2 pont.

**4. feladat** A $p$ valós paraméter mely értékei esetén van az alábbi egyenletnek valós megoldása?

$$\sin^4 x + \cos^4 x + p(\sin^6 x + \cos^6 x) = 1$$

**Megoldás:** Használjuk ki, hogy $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ és végezzük el az alábbi átalakításokat:

$$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x, \qquad \text{1 pont}$$

továbbá

$$\sin^6 x + \cos^6 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^3 - 3\sin^4 x \cdot \cos^2 x - 3\sin^2 x \cdot \cos^4 x =$$

$$= 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x(\sin^2 x + \cos^2 x) = 1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x. \qquad \text{1 pont}$$

Így az egyenlet:

$$1 - 2\sin^2 x \cdot \cos^2 x + p(1 - 3\sin^2 x \cdot \cos^2 x) = 1,$$

átalakítva

$$(3p+2)\sin^2 x \cdot \cos^2 x = p. \qquad \text{1 pont}$$

Ha $p = -\frac{2}{3}$, akkor a bal oldal 0, a jobb pedig nem, tehát ekkor nincs megoldás. A továbbiakban $p \neq -\frac{2}{3}$, így oszthatunk a $3p+2$ tényezővel:

$$\sin^2 x \cdot \cos^2 x = \frac{p}{3p+2}.$$

A $2\sin x \cos x = \sin 2x$ azonosság felhasználásával a kapott egyenlet átalakítható:

$$\sin^2 2x = \frac{4p}{3p+2}. \qquad \text{1 pont}$$

Mivel a szinuszfüggvény értékkészlete a $[-1; 1]$, ennek akkor és csak akkor van megoldása, ha

$$0 \leq \frac{4p}{3p+2} \leq 1. \qquad \text{1 pont}$$

A bal oldali egyenlőtlenség megoldásához vizsgáljuk meg a számláló és a nevező előjelét: $0 \leq 4p$, ha $0 \leq p$ illetve $0 \leq 3p+2$, ha $-\frac{2}{3} \leq p$ tehát ennek megoldása a $p < -\frac{2}{3}$ és $0 \leq p$.

A jobb oldali egyenlőtlenséget átrendezve $\frac{4p}{3p+2} - 1 \leq 0$, közös nevezőre hozva és az iméntihez hasonló vizsgálatot végezve, a $-\frac{2}{3} < p \leq 2$ megoldáshoz jutunk. 1 pont

A két egyenlőtlenség megoldásának közös része a kitűzött feladat kérdésére a válasz, azaz $0 \leq p \leq 2$ esetén van az egyenletnek valós megoldása. 1 pont

**Összesen: 7 pont.**

A fentitől eltérő gondolatmenet esetén 1 pont adható, ha a versenyző meghatároz legalább egy, de véges sok olyan $p$ értéket, amire van valós megoldás. Ha értékkészlet vizsgálatot végezve kizárja a $p < 0$ esetet 2 pontot kap, ugyanígy a $2 < p$ kizárásáért 2 pontot kap. A teljes megoldás természetesen más gondolatmenet esetén is 7 pontot ér.

**5. feladat** Bergengóciában minden év pontosan 365 napból áll. A bergengócok kedvenc mozijában egy játékot ajánlanak a nézőknek. Az egyesével, sorban beérkező nézők megmondják a születésnapjukat (hónap és nap). Aki elsőnek mond olyan időpontot, ami már elhangzott, annak visszatérítik a jegy árát. Hányadikként érdemes beállni a sorba, hogy ennek legnagyobb legyen a valószínűsége?

**Megoldás:** Jelölje $p_n$ annak valószínűségét, hogy a sorban $n$-edik néző kapja vissza a jegy árát. Nyilván az első nézővel ez nem fordulhat elő, ezért $p_1=0$. 1 pont

Az év tetszőleges napját tekintve $\frac{1}{365}$ annak a valószínűsége, hogy éppen aznap van valakinek a születésnapja. Így $p_n$ meghatározásához használhatjuk a klasszikus modellt, a kedvező esetek számát osztjuk az összes eset számával. Ez $p_2$ esetén azt jelenti, hogy az első néző 365-féle napot mondhat, a második pont ugyanezt mondja; az összes eset pedig $365^2$, hiszen egymástól függetlenül mindkettőjük születésnapja 365-féle lehet. Így $p_2 = \frac{365}{365^2}$. 1 pont

Most meghatározzuk $p_n$ értékét általánosan. Azok a kedvező esetek, amikor az első $n-1$ nap különböző, az $n$-edik pedig ezek közül valamelyik. Az első születésnap lehet 365-féle, a második az elsőtől különböző 364-féle és így tovább mindig az előzőnél eggyel kevesebb lehetőséggel egészen $365-(n-2)$-féle. Végül az $n$-edik a korábban elhangzott $n-1$ nap valamelyike lehet.

Az összes eset a függetlenség miatt $365^n$, így

$$p_n = \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365-(n-2)) \cdot (n-1)}{365^n}. \qquad 1 \text{ pont}$$

Vizsgáljuk meg, mikor lesz $p_n < p_{n+1}$:

$$\frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (367-n) \cdot (n-1)}{365^n} < \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (367-n) \cdot (366-n) \cdot n}{365^{n+1}}.$$

Ezt rendezve

$$365 \cdot (n-1) < (366-n) \cdot n, \quad \text{amiből} \quad n^2 - n - 365 < 0. \qquad 2 \text{ pont}$$

A kapott másodfokú egyenlőtlenség megoldása egy tizedesjegyre kerekítve

$$-18,6 < n < 19,6.$$

Ezek szerint $p_{20}$ még nagyobb, mint $p_{19}$, de utána már minden következő kisebb az előzőnél. 1 pont

A sorba huszadikként érdemes beállni, ekkor kapjuk vissza a legnagyobb valószínűséggel a jegy árát. 1 pont

**Összesen: 7 pont.**