OKTATÁSI HIVATAL

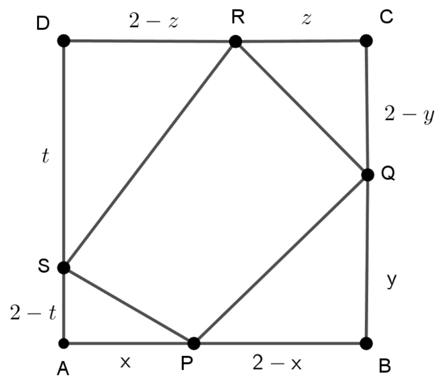
A 2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(gimnázium)
Javítási-értékelési útmutató

1. feladat Az x, y, z, t valós számok mindegyike eleme a $[0;2]$ intervallumnak. Igazoljuk, hogy

$$x(2-t)+y(2-x)+z(2-y)+t(2-z)\le 8.$$

Megoldás: Legyen $ABCD$ egy 2 egység oldalhosszúságú, vagyis 4 egység területű négyzet. Az AB, BC CD és DA szakaszokon úgy vesszük fel rendre a P, Q, R és S pontokat, hogy $AP=x$, $BQ=y$, $CR=z$ és $DS=t$ legyen. 3 pont



A feladatban szereplő egyenlőtlenség mindkét oldalát 2-vel osztva a következő alakot kapjuk:

$$\frac{x(2-t)}{2}+\frac{y(2-x)}{2}+\frac{z(2-y)}{2}+\frac{t(2-z)}{2}\le 4.$$

Ebben az egyenlőtlenségben éppen az ábránkon szereplő területek vannak, a négyzet csúcsainál található háromszögek területe együtt sem lehet nagyobb a négyzet területénél:

$$T_{APS}+T_{BQP}+T_{CRQ}+T_{DSR}\le T_{ABCD}.$$ 3 pont

Ebből az is kiderül, hogy egyenlőség két esetben lehet, ha $x=z=2$ és $y=t=0$, vagy $x=z=0$ és $y=t=2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

2. feladat Egy n tagú társaság tagjai páronként ismerik, vagy nem ismerik egymást. Mindkét esetben ez legyen kölcsönös. Szeretnénk közülük négy embert leültetni egy kerek asztal köré úgy, hogy a szomszédok vagy mind ismerősök legyenek, vagy egyik szomszédpár se ismerje egymást. Mely n értékre vállalhatjuk, hogy biztosan létre tudunk hozni ilyen asztaltársaságot akkor, ha nem is ismerjük előre a társaságban levő ismerettségi viszonyokat?

Megoldás: A megoldást gráfok segítségével írjuk le, legyenek az emberek a gráf pontjai. Két embert tekintve a nekik megfelelő pontok közé húzzunk piros élt, ha ismerik egymást, különben pedig zöldet. Így az n pontú teljes gráf minden élét kiszínezzük. Ebben a gráfban keresünk négy pontú kört, amelynek mind a négy éle azonos színű.

Ha $n \leq 5$, akkor nem feltétlenül lesz ilyen kör. Legyenek a gráf pontjai egy szabályos ötszög csúcsai, az élek pirosak, az átlók zöldek. Ebben a gráfban, illetve $n < 5$ esetén bármely részgráfjában, nincs 4 pontú kör azonos színű élekből. 2 pont

Ha $n > 5$, akkor biztosan lesz ilyen kör. Vegyünk a gráfból hat pontot és az általuk kifeszített részgráfot. Ebben a gráfban $\binom{6}{2} = 15$ él van, ezért valamelyik színből legalább 8 él lesz. Feltehető, hogy ez a piros. 1 pont

Mivel a piros éleknek legalább 16 vége van, lesz olyan pont, amiből legalább három piros él indul. Legyen P az a pont, amelyből a legtöbb piros él indul. A P-vel piros éllel összekötött pontok alkossák az A, a többiek a B csoportot. 2 pont

Vegyük számba a piros éleket és számoljuk meg hányan lehetnek, ha nincs piros élű 4 pontú kör. Ha A-ban k pont van ($k > 2$), akkor P-ből indul k darab; minden B beliből legfeljebb egy piros él mehet az A beliekhez; az A részgráfon belül nem indulhat egy csúcsból két piros él; B-n belül egyetlen él lehet, az is csak akkor, ha $k = 3$. A piros élek száma ezen szempontok szerint összegezve $k = 3$ esetén 3+2+1+1, $k = 4$ esetén 4+1+2, végül $k = 5$ esetén 5+0+2. Mivel ezek mindegyike kisebb, mint 8, biztosan lesz megfelelő kör. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat Tekintsünk egy körbe írt $ABCDEF$ konvex hatszöget. Igazoljuk, hogy az AD, BE és CF átlók akkor és csak akkor illeszkednek egy pontra, ha

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$

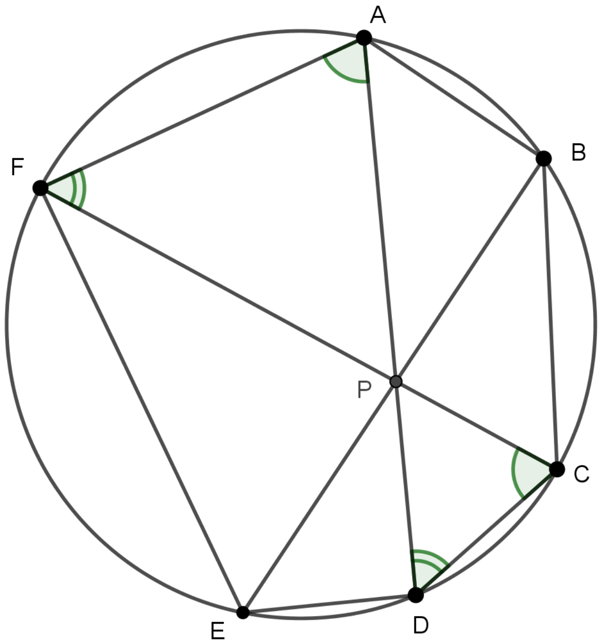
Megoldás: Tegyük fel először, hogy a feladatban említett átlók egy P pontra illeszkednek. A kerületi szögek tétele miatt az ábrán látható PAF és PCD háromszögek szögei megegyeznek, így a háromszögek hasonlók. Ezért $CD : FA = PD : PF$. 1 pont

Két további hasonló háromszögpárból ugyanígy adódik, hogy $EF : BC = PF : PB$ és $AB : DE = PB : PD$. A három egyenlet megfelelő oldalainak összeszorzásával adódik, hogy

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EF}{FA} = 1.$$ 3 pont

Térjünk rá a másik irányra. Tegyük fel, teljesül a feladatban szereplő összefüggés. Legyen P az AD és BE egyenesek metszéspontja, továbbá CP egyenes metszéspontja a körrel a G pont. A megoldás első része alapján az $ABCDEG$ hatszög oldalaira teljesül, hogy

$$\frac{AB}{BC} \cdot \frac{CD}{DE} \cdot \frac{EG}{GA} = 1.$$



Ezt összevetve az $ABCDEF$ hatszögre teljsülő feltétellel: $EF : FA = EG : GA$. Az EFA és EGA háromszögek hasonlók, hiszen az $EFA\angle = EGA\angle$, a szöget bezáró két oldal aránya pedig azonos. Mivel az említett szöggel szemközti EA oldal közös, ezért a két háromszög egybevágó. Mivel az arányból következően a két háromszög körüljárása is azonos, ezért ez csak $F = G$ esetén teljesülhet. 3 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Melyik az a legnagyobb x egész szám, amelyre $4^{17} + 4^{1020} + 4^x$ négyzetszám?

Megoldás: Megmutatjuk, hogy a megoldás $x = 2022$, ekkor

$$4^{17} + 4^{1020} + 4^{2022} = (2^{17} + 2^{2022})^2.$$ 1 pont

Tegyük fel, hogy $x > 2022$, a kifejezés mégis négyzetszám. Ekkor

$$4^{17} + 4^{1020} + 4^x = 4^{17}(1 + 4^{1003} + 4^{x-17}).$$

Mivel 4^{17} négyzetszám, ezért $1 + 4^{1003} + 4^{x-17}$ is az. 3 pont

Viszont

$$1 + 4^{1003} + 4^{x-17} > (2^{x-17})^2$$

$$1 + 4^{1003} + 4^{x-17} \geq (1 + 2^{x-17})^2 = 1 + +2^{x-16} + 4^{x-17}$$

$$2^{2006} \geq 2^{x-16}$$

amiből $2022 \geq x$. Ellentmondásra jutottunk, tehát a kitűzött feladat kérdésére a válasz: $x = 2022$. 3 pont

Összesen: 7 pont