OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA (GIMNÁZIUM)

FELADATOK

1. feladat Igazoljuk, hogy végtelen sok pozitív egész $(a;b;c)$ számhármasra teljesül, hogy

$$\binom{a}{2}+\binom{b}{2}=\binom{c}{2}.$$

Igaz-e, hogy végtelen sok olyan számhármasra is teljesül, ahol $a \le b \le c \le 2a$?

2. feladat Az $XYZV$ téglalap XY oldalán van 7 különböző pont, A, B, C, D, E, F és G ebben a sorrendben. A szemközti ZV oldalon is van 7 különböző pont ezeket valamilyen sorrendben az 1,2,...,7 számok jelölik. Összekötjük az A-t és az 1-es pontot, a B-t és a 2-es pontot, ..., a G-t és a 7-es pontot kékkel. Így 7 kék szakaszt kaptunk, amelyek a téglalap szemközti oldalai között futnak.

(a) Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor minden kék szakaszt ugyanannyi másik kék szakasz metszi?

(b) Tegyük fel, hogy a pontok elhelyezkedése olyan, hogy három kék szakasz nem metszi egymást ugyanabban a pontban. Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor a kék szakaszoknak összesen 7 metszéspontja van?

3. feladat Bizonyítsuk be, hogy az x_1, x_2, ..., x_{2023} különböző pozitív egészekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség, továbbá határozzuk meg, mikor lesz egyenlőség.

$$x_1^5+x_2^5+...+x_{2023}^5+x_1^7+x_2^7+....+x_{2023}^7 \ge 2\cdot(x_1^3+x_2^3+...+x_{2023}^3)^2.$$

Mindegyik feladat helyes megoldása 7 pontot ér.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program