OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA

(gimnázium)

Javítási-értékelési útmutató

1. feladat Igazoljuk, hogy végtelen sok pozitív egész $(a;b;c)$ számhármasra teljesül, hogy

$$\binom{a}{2}+\binom{b}{2}=\binom{c}{2}.$$

Igaz-e, hogy végtelen sok olyan számhármasra is teljesül, ahol $a \le b \le c \le 2a$?

Megoldás: A feladatban szereplő $\binom{n}{2}$ alakkal megadott számok az úgynevezett háromszögszámok, amelyekre

$$1+2+...+(n-1)=\binom{n}{2} \tag{1}$$

Ezt szem előtt tartva azonnal adódik végtelen sokféle megoldás például olyan módon, ha a (1) bal oldalán olyan összeadás áll, ahol az utolsó tag maga is háromszögszám. Azaz választunk egy $a \ge 3$ pozitív egészt, legyen $\binom{a}{2}=c-1$ és $c=b+1$. Így végtelen sokféle megoldás például:

$$(a;b;c)=\left(a;\binom{a}{2};\binom{a}{2}+1\right) \quad a=3,4,5,...$$

2 pont

A feladatban szereplő második kérdésre igen a válasz, megadható végtelen sok megoldás. Könnyen ellenőrizhető az alábbi azonosság:

$$\binom{3d+1}{2}+\binom{4d+2}{2}=\binom{5d+2}{2} \quad d=1,2,3,...$$

Az ebben szereplő $(a;b;c)=(3d+1;4d+2;5d+2)$ értékekre pedig valóban teljesül, hogy $3d+1<4d+2<5d+2<2(3d+1)=6d+2$. 5 pont

Összesen: 7 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

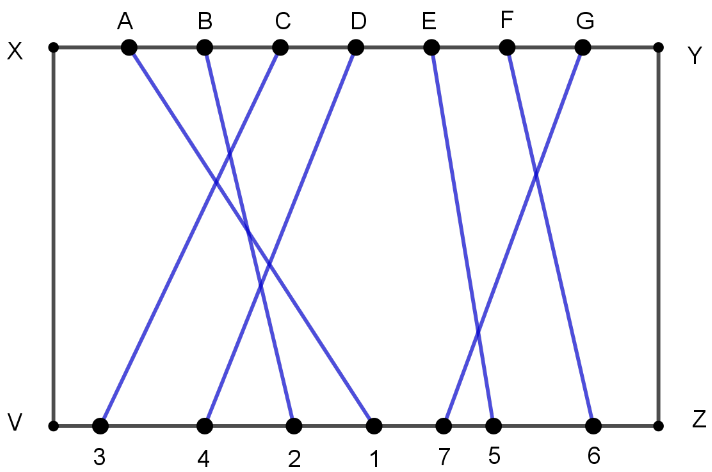
2. feladat Az $XYZV$ téglalap XY oldalán van 7 különböző pont, A, B, C, D, E, F és G ebben a sorrendben. A szemközti ZV oldalon is van 7 különböző pont ezeket valamilyen sorrendben az 1,2,...,7 számok jelölik. Összekötjük az A-t és az 1-es pontot, a B-t és a 2-es pontot, ..., a G-t és a 7-es pontot kékkel. Így 7 kék szakaszt kaptunk, amelyek a téglalap szemközti oldalai között futnak.

(a) Hány sorrendje lehet a számozott pontoknak, ha minden kék szakaszt ugyanannyi másik kék szakasz metszi?

(b) Tegyük fel, hogy a pontok elhelyezkedése olyan, hogy három kék szakasz nem metszi egymást ugyanabban a pontban. Hány olyan sorrendje van a számozott pontoknak, amikor a kék szakaszoknak összesen 7 metszéspontja van?

Megoldás: Vegyük a számozott pontok valamely sorrendjét V-től Z felé haladva az alábbi ábra szerint: például 3421756. Vizsgáljunk meg egy kék szakaszt, tekintsük a B2-t. Ezt akkor metszi egy másik, ha a szakasz végén álló szám a 2-nél nagyobb és a szám a 2 előtt van a sorrendben (ilyen a C3 és a D4), vagy kisebb 2-nél és a 2 után következik (ilyen az A1). 1 pont

Ezek alapján a megadott sorrendben 7 metszéspont lesz. Van négy szám, amelyekből induló szakaszok könnyen áttekinthetők: a sorrendben az első, példánkban a 3, ez a leírtak alapján két szakaszt metsz. Hasonló módon a sorrendben az utolsó, példánkban az 6, ezt egy másik metszi. A másik két szám az 1 és a 7. Az A1 szakaszt három másik metszi, hiszen az 1 a negyedik helyen van, míg a G7 szakaszt kettő másik metszi, hiszen a 7 után még két szám következik. A továbbiakban ezen szempontok alapján vizsgáljuk a számozott pontok sorrendjét.



(a) Tekintsük azt a gráfot, amelynek pontjai a betűs pontok, él pedig akkor fut két betű között, ha a belőlük induló kék szakaszok metszik egymást. Ez egy 7 pontú gráf, amelyben a fokszámok összege páros kell legyen. Az (a) részben megadott feltétel szerint minden fokszám azonos, tehát csak páros lehet. Végignézzük, mi lehet a különböző esetekben a számozott pontok sorrendje. Ha minden fokszám 0, ehhez egy sorrend tartozik, az 1234567. Ha minden fokszám 6, akkor a hozzá tartozó egyetlen megfelelő sorrend a 7654321. Eddig két megfelelő sorrendet találtunk. 1 pont

Ha minden fokszám 2, akkor a legelső pont a 3, a harmadik pont az 1, az ötödik pont a 7 és az utolsó pont az 5, tehát így állunk: $3p1q7r5$. A p nem lehet a 6. Ha $q = 6$, akkor $p = 2$ és $r = 4$, így a sorrend 3216745. Ha $r = 6$, akkor $p = 4$ és $q = 2$, a sorrend 3412765. Ebben az esetben újabb két sorrendet kaptunk. 1 pont

Ha egy sorrendhez tartozó gráfot vizsgálunk, majd tekintjük a a számokat éppen a fordított sorrendben, az ehhez tartozó gráf éppen az előző komplementere. Ezért ha minden fokszám 4, az éppen azon esetek komplementere, ahol minden fokszám 2, így ezekből is kettő van.

Összesen tehát hat olyan sorrend van, ahol minden kék szakaszt ugyanannyi másik kék metsz. 1 pont

(b) A feladatban 7 pont szerepel, ennek mintájára tekinthetjük azt, hogy n pontunk van két-két szemközti oldalon. Legyen $f(n;k)$ a számozott 1,2,...,n pontok azon sorrendjeinek száma, amelyekben éppen k darab metszéspont van. Ha $k = 0$, akkor minden pozitív egész n-re $f(n;0) = 1$, és ez az egy sorrend éppen az 1,2,3,...,n. Ha bármely két számozott ponthoz tartozó kék szakasz metszi egymást, akkor $\binom{n}{2}$ metszéspont jön létre, az ehhez tartozó sorrend az n,$n-1$,...,2,1. Így $f(n;\binom{n}{2}) = 1$ és ha $\binom{n}{2} < k$, akkor $f(n;k) = 0$. Ha k negatív egész, akkor a függvény értéke mindig 0. 1 pont

Az $f(n;k)$ függvény értékeit $n = 1, 2$ esetén a leírtak meghatározzák. A továbbiakban a függvény értékét rekurzívan kaphatjuk meg. Tegyük fel, hogy egy adott n értékre már minden egész k-ra ismerjük a függvény értékét. Ebből megkaphatjuk $f(n+1,k)$ értékét: a szerint nézzük a számozott pontok sorrendjeit, hogy az 1 hanyadik helyen áll. Ha az első, akkor a hozzá tartozó kék szakaszon 0 metszéspont van, a többi pont megfelelő sorrendjeinek száma $f(n;k)$. Ha az 1 a második helyen áll, akkor a hozzá tartozó kék szakaszon egy metszéspont van, a többi szám megfelelő sorrendjeinek száma ezért $f(n;k-1)$. Ennek mintájára ha az 1 a t-ik helyen áll, akkor a hozzá tartozó kék szakaszon $t-1$ metszéspont van, a többi szám megfelelő sorrendjeinek száma ezért $f(n;k-(t-1))$. Formálisan leírva:

$$f(n+1;k) = \sum_{i=0}^{n} f(n;k-i).$$ 1 pont

Ezen rekurzió segítségével kitölthetjük az alábbi táblázatot, a táblázat első sorában találjuk k értékét, az első oszlopban pedig n értékét, a további megfelelő cellákban a függvény értéke áll.

	0	1	2	3	4	5	6	7
1	1	0	0	0	0	0	0	0
2	1	1	0	0	0	0	0	0
3	1	2	2	1	0	0	0	0
4	1	3	5	6	5	3	1	0
5	1	4	9	15	20	22	20	15
6	1	5	14	29	49	71	90	101
7	1	6	20	49	98	169	259	359

A feladatban kérdezett sorrendek száma 359. 1 pont

Összesen: 7 pont

3. feladat Bizonyítsuk be, hogy az x_1, x_2, ..., x_{2023} különböző pozitív egészekre teljesül az alábbi egyenlőtlenség, továbbá határozzuk meg, mikor lesz egyenlőség.

$$x_1^5 + x_2^5 + ... + x_{2023}^5 + x_1^7 + x_2^7 + ... + x_{2023}^7 \geq 2 \cdot (x_1^3 + x_2^3 + ... + x_{2023}^3)^2.$$

Megoldás: Indexeljük úgy a változókat, hogy az index növekedésével a változók értéke is növekedjen. Legyen a változók száma n. Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy a megfelelő állítás mindn pozitív egész n esetén igaz. Kezdő lépés: $x_1^5 + x_1^7 \geq 2 \cdot (x_1^3)^2 = 2x_1^6$. A feladat szövege szerint x_1 pozitív, ezért oszthatunk x_1^5-nel. Ekvivalens átrendezéssel kapjuk: $(x_1 - 1)^2 \geq 0$. Ez az egyenlőtlenség mindig teljesül, egyenlőség egyetlen esetben lehetséges, ha $x_1 = 1$. 1 pont

Indukciós lépés: tegyük fel, hogy az állítás igaz n-re, ennek segítségével megmutatjuk, hogy igaz $n+1$-re is. Az indukciós feltételt felhasználva az $n+1$-re felírt állítás igazolásához elegendő belátni a következőt:

$$x_{n+1}^5 + x_{n+1}^7 \geq 2 \cdot (x_{n+1}^6 + 2x_{n+1}^3(x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3)). \qquad \text{2 pont}$$

Oszthatunk a pozitív x_{n+1}^3-nel. Átrendezve kapjuk

$$\frac{x_{n+1}^2(x_{n+1} - 1)^2}{4} \geq x_1^3 + x_2^3 + ... + x_n^3. \qquad (2)$$

Használjuk fel a köbszámok összegére vonatkozó összefüggést, amely szerint

$$1^3 + 2^3 + ... + k^3 = \frac{k^2 \cdot (k+1)^2}{4}.$$

Ezek szerint (2) bal oldalán álló összeg éppen az 1-től $(x_{n+1} - 1)$-ig a számok köbeinek összege, a jobb oldalon pedig $x_{n+1} - 1$-nél nem nagyobb, különböző pozitív egészek köbeinek összege áll ezért az egyenlőtlenség fennáll. Az is leolvasható, hogy egyenlőség éppen akkor van, ha $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, ..., $x_n = n$ és $x_{n+1} = n + 1$. 3 pont

Minden n-re beláttuk az állítást és meghatároztuk az egyenlőség esetét. A feladatban kitűzött $n = 2023$ esetében is ennek megfelelően egyetlen esetben lehet egyenlőség, az általánosságot nem sértő $x_i < x_{i+1}$ feltétellel, ha $x_i = i$ $(i = 1, 2, ..., 2023)$.

1 pont

Összesen: 7 pont