



OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)
FELADATLAP

1. feladat

Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek pozitív osztói párba állíthatók úgy, hogy minden párban a két tag egymáshoz relatív prím legyen?

2. feladat

Tekintsük az ABC háromszög A csúcsából a beírt körhöz húzott érintőszakaszok felezőpontjait, és legyen e az ezeken átfektetett egyenes. Hasonló módon legyen f a B -ből induló érintőszakaszok felezőpontjain átmenő egyenes, és legyen M az e és f egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $AM = BM$.

3. feladat

Adott 2023 különböző pont a térben. Az ezeket páronként összekötő szakaszok mindegyikéből kétféle irányítással képezhetünk vektort. Igazoljuk, hogy meg lehet választani az irányításokat úgy, hogy ezeknek a vektoroknak az összege a zérusvektor legyen. Mutassuk meg, hogy ez nem feltétlenül van így, ha a pontok száma 2022.

4. feladat

Két bolha, Anett és Balázs ül a koordináta-rendszer egy-egy rácspontján. Anett az origóból indul, és kezdetben, illetve minden lépés után a $(0, 1)$ vektor irányába néz. Balázs az (x, y) rácspontból indul, kezdetben ő is a $(0, 1)$ vektor irányába néz, ám ő minden lépés után abba az irányba néz, amerre haladt a lépés során. Minden lépésben mondunk egy irányt a bolháknak (jobbra, balra, előre vagy hátra), és mindkét bolha egységnyit ugrik a megadott irányban a nézési irányához képest. Például ha az első három lépésben a jobbra, balra és előre irányokat mondjuk, akkor Anett az $(1, 0)$, $(0, 0)$, $(0, 1)$ pontokat járja be, míg Balázs az $(x + 1, y)$, $(x + 1, y + 1)$, $(x + 1, y + 2)$ pontokat. Melyek azok az (x, y) számpárok, melyekre lehetséges, hogy valahány lépés után ugyanazon a rácsponton fog ülni Anett és Balázs?

5. feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén fennáll az alábbi egyenlőség:

$$n! = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n (-1)^{i+j} \binom{n}{i} \binom{n}{j} \binom{ij}{n}.$$

(Ha $ij < n$, akkor az $\binom{ij}{n}$ binomiális együttható értéke 0.)

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS
MINISZTERIUM

 Nemzeti
Tehetség Program