OKTATÁSI HIVATAL

A 2022/2023. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók.

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2022. november A versenybizottság

1. feladat

Melyek azok a pozitív egész számok, amelyek pozitív osztói párba állíthatók úgy, hogy minden párban a két tag egymáshoz relatív prím legyen?

Első megoldás:

Belátjuk, hogy ezek éppen az 1-nél nagyobb négyzetmentes számok. Először megmutatjuk, hogy más nem lehet.

Tegyük föl, hogy az n pozitív egészre és p_0 prímszámra $p_0^2 \mid n$ teljesül, és legyen az n prímtényezős fölbontása $p_0^{k_0} p_1^{k_1} \cdots p_t^{k_t}$ (ekkor $k_0 \geq 2$). Tudjuk, hogy az n osztóinak száma $d(n) = (k_0+1) \cdot (k_1+1) \cdots (k_t+1)$: az osztók $p_0^{\ell_0} p^{\ell_1} \cdots p^{\ell_t}$ alakban írhatók, ahol $0 \leq \ell_i \leq k_i$ minden i-re. Ezek közül a p_0-lal oszthatók azok, ahol $1 \leq \ell_0 \leq k_0$, így összesen $k_0 \cdot (k_1+1) \cdots (k_t+1)$ darab van belőlük. Mivel $k_0 \geq 2$, ezért ez nagyobb, mint $d(n)/2$; a skatulyaelv szerint tehát az osztók tetszőleges párosításában kellene legyen olyan pár, melynek mindkét tagja osztható p_0-lal, azaz nem relatív prímek egymáshoz. Az n számnak tehát tényleg négyzetmentesnek kell lennie. (4 pont)

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

Maradtak így a négyzetmentes számok; és az 1 persze világos módon nem jó, hiszen csak egyetlen pozitív osztója van. (1 pont)

Tegyük most föl, hogy $n > 1$ négyzetmentes egész. Ekkor adott $d \mid n$ pozitív osztó párja legyen az n/d (és viszont). Ezek mindig relatív prímek lesznek, mivel ellenkező esetben lenne közös p prímosztójuk, melynek négyzete pedig osztaná n-et. Speciálisan $d \neq n/d$, hiszen a két szám relatív prím, és $n > 1$. Következésképpen ez jó párosítás.

Ezzel a bizonyítást befejeztük. (2 pont)

Második megoldás:

Világos, hogy ha létezik a kívánt párba állítás, akkor $n > 1$, (1 pont)
továbbá az n párja csak az 1 lehet. (1 pont)
Legyen p az n szám egyik prímosztója. Ekkor n/p párja csak p valamely hatványa lehet, hiszen az n szám p-től különböző prímosztói mind osztják n/p-t is. (1 pont)
Az 1 már foglalt, tehát n/p párja osztható p-vel, így $p \nmid n/p$, vagyis $p^2 \nmid n$. Tehát csak akkor létezhet a párba állítás, ha $n > 1$ négyzetmentes szám. (2 pont)

Azt is megkaptuk, hogy négyzetmentes $1 < n$ esetén minden p prímosztóra n/p párja csak p (vagyis az osztópárja) lehet. A párba állítást ugyanígy folytathatjuk. Ha p és q különböző prímosztók, akkor $n/(pq)$ párja a négyzetmentes n szám osztói közül csak $1, p, q, pq$ valamelyike lehet, amik viszont pq kivételével már foglaltak, így $n/(pq)$ párja pq (vagyis az osztópárja). (1 pont)

Ezt ugyanígy folytathatjuk, a prímtényezők száma szerinti indukcióval. Tegyük fel, hogy már tudjuk, hogy ha $k \mid n$ osztónak legfeljebb $r-1$ prímtényezője van, akkor n/k párja k. Legyen most $k \mid n$ egy olyan osztó, aminek r prímtényezője van: $n = p_1p_2 \dots p_r$. Az n/k osztó párja csak $p_1p_2 \dots p_r$ valamelyik osztója lehet, ezek viszont $p_1 \dots p_r$ kivételével mind foglaltak már. Tehát n/k párja is csak az osztópárja lehet, ez viszont megfelelő.

Ezzel megkaptuk, hogy egyetlen megfelelő párba állítás létezik, éspedig az, amikor az osztópárok alkotják a párokat. A négyzetmentesség miatt a párok tagjai valóban relatív prímek, $n > 1$ miatt pedig minden pár két tagja különböző. (1 pont)

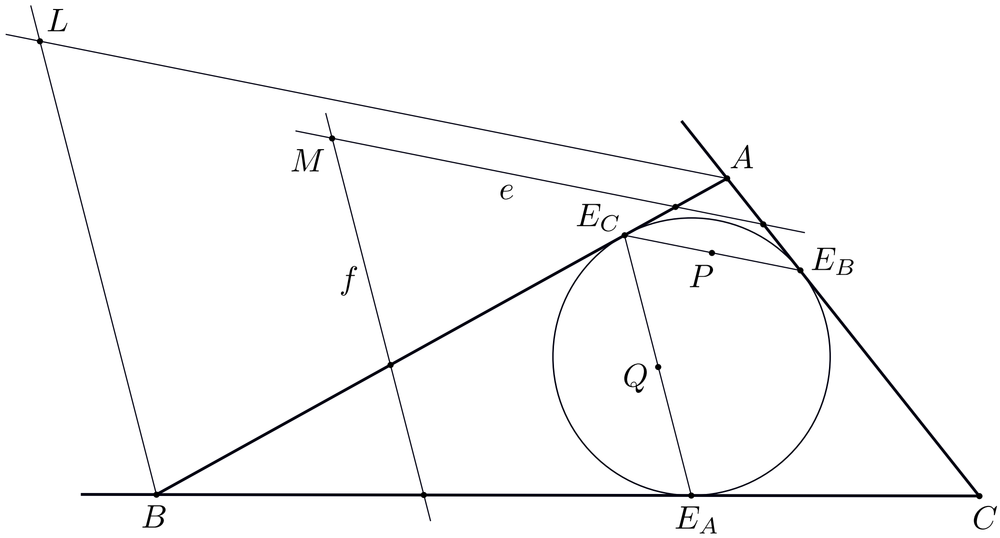
Másképpen a nem négyzetmentes n esete:
Tegyük fel, hogy az n szám osztható valamely p prímszám négyzetével. Az n szám p-vel nem osztható pozitív osztói legyenek $d_1, \dots, d_k$. Ekkor $pd_1, \dots, pd_k, p^2d_1, \dots, p^2d_k$ egymástól különböző p-vel osztható pozitív osztói n-nek. Mivel p-vel osztható osztóból ezek szerint több van, mint p-vel nem oszthatóból, minden párba állításnál lesz olyan p-vel osztható osztó, melynek párja is p-vel osztható, azonban így nem lehetnek relatív prímek.

Másképpen a négyzetmentes n esete:
Az $n = p_1 \cdots p_t$ négyzetmentes pozitív egész osztói megfelelnek a $H \subseteq \{1, \dots, t\}$ részhalmazoknak: egy ilyen halmazhoz a $\prod_{i \in H} p_i$ osztó tartozik. Különböző H halmazok esetén a prímtényezős fölbontás eltérő, tehát ezek tényleg mind különböző osztókat határoznak meg. Két osztó pontosan akkor relatív prím, ha a megfelelő halmazok diszjunktak. Elég tehát az $\{1, \dots, t\}$ részhalmazait párokba állítani, ahol minden párban a két halmaz diszjunkt. Ez pedig megtehető, ha minden H-hoz az $\{1, \dots, t\} \setminus H$ komplementert rendeljük (ezek különbözők, ha $t > 0$).

2. feladat

Tekintsük az ABC háromszög A csúcsából a beírt körhöz húzott érintőszakaszok felezőpontjait, és legyen e az ezeken átfektetett egyenes. Hasonló módon legyen f a B-ből induló érintőszakaszok felezőpontjain átmenő egyenes, és legyen M az e és f egyenesek metszéspontja. Bizonyítsuk be, hogy $AM = BM$.

Első megoldás: Jelölje E_A, E_B és E_C a beírt kör érintési pontját rendre a BC, CA, illetve AB oldalon.



Ekkor az E_BE_C egyenes párhuzamos e-vel, és mindketten párhuzamosak a háromszög A-beli külső szögfelezőjével. Hasonlóan E_CE_A és f párhuzamosak a B-beli külső szögfelezővel. Legyen L a két külső szögfelező metszéspontja. Ekkor L a C-beli belső szögfelezőre illeszkedik (történetesen L a háromszög C-vel szemközti hozzáírt körének a középpontja), és így a szögfelezőre vonatkozó tengelyes szimmetria miatt $LE_A = LE_B$. (2 pont)

Az E_C középpontú, $1/2$ arányú középpontos kicsinyítésnél a fenti két külső szögfelező az e és az f egyenesbe megy át, ezért az L pont M-be kerül. (2 pont)

Legyen P az E_BE_C szakasz felezőpontja, és Q az E_CE_A szakasz felezőpontja. Ekkor a fenti kicsinyítésnél az L, E_A, E_B pontok rendre M-be, Q-ba, illetve P-be kerülnek. Ezért az $LE_A = LE_B$ egyenlőségből $MQ = MP$ következik. (2 pont)

Az e és f egyenes középvonal az E_CE_BA, illetve E_AE_CB egyenlő szárú háromszögben, ezért e az AP szakasz, f pedig a BQ szakasz felező merőlegese. Emiatt a mindkettőjükre illeszkedő M pontra $MA = MP$ és $MB = MQ$ teljesül. Így valóban $MA = MP = MQ = MB$. (1 pont)

Második megoldás: Tekintsük az A és a B pontot zérus sugarú pontköröknek. A feladatbeli e egyenes ekkor A és a beírt kör hatványvonala, f pedig B és a beírt kör hatványvonala. (3 pont)

Metszéspontjuk, az M pont ezért a három körnek, A-nak, B-nek és a beírt körnek a hatványpontja. Emiatt M illeszkedik A és B hatványvonalára is, vagyis az AB szakasz felező merőlegesére. Így valóban $MA = MB$. (4 pont)

3. feladat

Adott 2023 különböző pont a térben. Az ezeket páronként összekötő szakaszok mindegyikéből kétféle irányítással képezhetünk vektort. Igazoljuk, hogy meg lehet választani az irányításokat úgy, hogy ezeknek a vektoroknak az összege a zérusvektor legyen. Mutassuk meg, hogy ez nem feltétlenül van így, ha a pontok száma 2022.

Első megoldás: 2023 pont esetén tekintsük a 2023 szögpontú teljes gráfot. Ebben minden csúcs foka páros, ezért létezik a gráfban Euler-körséta. Ha a vektorok irányítását a körséta bejárásának irányában adjuk meg, akkor a vektorok összege nyilvánvalóan nulla lesz. (2 pont)

Ha a pontok száma 2022, megadhatjuk őket úgy, hogy közülük 2021 (A_1, A_2, …, A_{2021}) egy S síkban feküdjön, és az utolsó, A_{2022}, ne illeszkedjen az S síkra. Azt állítjuk, hogy ilyenkor a vektorok összege semmilyen irányítás mellett sem lehet nulla. (1 pont)

Tegyük fel, hogy adott a szakaszok egy irányítása. Mindegyik így előállt vektort felbontjuk egy S-sel párhuzamos és egy S-re merőleges komponens összegére, és a feladatbeli vektorösszeget külön-külön képezzük a kétféle komponensből. (1 pont)

Azt mutatjuk meg, hogy az összegvektor S-re merőleges komponense nem lehet a zérusvektor (és emiatt persze a teljes összeg sem lehet nulla). Ez a komponens az összeadandó vektorok S-re merőleges komponenseinek az összege. (1 pont)

Az első 2021 pont között futó bármelyik vektornak mindkét végpontja S-ben van, ezért ezek mindannyian párhuzamosak S-sel, és így az összegük is párhuzamos S-sel. A teljes összegben ezeken a vektorokon kívül olyan vektorok szerepelnek, amelyek egy S-beli pontot kötnek össze az A_{2022} ponttal valamilyen irányítással tekintve. Ez 2021 darab vektor, és mindegyiküknek az S-re merőleges komponense ugyanaz az A_{2022}-ből merőlegesen S-be mutató vektor, vagy annak a (-1)-szerese. Mivel ezeknek a vektoroknak a száma páratlan, az összegük nem lehet nulla. (2 pont)

Második megoldás: 2023 pont esetén az első megoldás módszerét követjük. (2 pont)

Megmutatjuk, hogy 2022 pontot lehet úgy felvenni a térben, hogy a szakaszok bármilyen irányítása mellett a vektorösszeg nem nulla. A pontok közül 2021-et úgy helyezünk el, hogy ezek távolsága kicsi legyen egymástól, és az utolsó pontot ezektől igen távolra tesszük. (1 pont)

Válasszuk ki az első 2021 pontot (az A_1, A_2, …, A_{2021} pontokat) úgy, hogy bármelyik kettőnek a távolsága 2-nél kisebb legyen. (Ezt elérhetjük például úgy, hogy mindegyiket egy 1 sugarú gömb belsejéből választjuk.) Belátjuk, hogy ha A_{2022} a gömb O középpontjától legalább 2021^2 egységnyi távolságra van, akkor a vektorösszeg semmilyen előjelezés mellett sem lehet nulla. (1 pont)

Ha adott a pontok között futó szakaszok egy tetszőleges irányítása, akkor a szóban forgó vektorösszeget a

$$\mathbf{v} = \sum_{1 \le i < j \le 2022} \varepsilon_{ij} \overrightarrow{A_i A_j}$$

képlettel írhatjuk le, ahol ε_{ij} a megadott irányításnak megfelelő $+$ vagy $-$ előjel. Ebből az összegből különválasztjuk az első 2021 pont között futó vektorokat, a többit pedig

O-n átvezetett összegalakban írjuk:

$$\begin{aligned}\mathbf{v} &= \sum_{1\le i<j\le 2021} \varepsilon_{ij}\overrightarrow{A_iA_j} + \sum_{1\le k\le 2021} \varepsilon_{k,2022}\overrightarrow{A_kA_{2022}} = \\ &= \sum_{1\le i<j\le 2021} \varepsilon_{ij}\overrightarrow{A_iA_j} + \sum_{1\le k\le 2021} \varepsilon_{k,2022}\overrightarrow{A_kO} + \sum_{1\le k\le 2021} \varepsilon_{k,2022}\overrightarrow{OA_{2022}}\,.\end{aligned}$$

Itt a harmadik szummában páratlan sokszor veendő ugyanaz az $\overrightarrow{OA_{2022}}$ vektor valamilyen előjellel, ezért ennek a harmadik összegvektornak a hossza legalább az OA_{2022} távolság, azaz legalább 2021^2. Az első két szummában csak rövid (< 2, illetve < 1 hosszúságú) vektorok szerepelnek, így ezek összegére a háromszög-egyenlőtlenség felhasználásával

$$\left| \sum_{1\le i<j\le 2021} \varepsilon_{ij}\overrightarrow{A_iA_j} + \sum_{1\le k\le 2021} \varepsilon_{k,2022}\overrightarrow{A_kO} \right| < \binom{2021}{2}\cdot 2 + 2021\cdot 1 = 2021^2$$

érvényes. A $\mathbf{v}$ vektor, vagyis a teljes összeg így nem lehet nulla, hiszen egy 2021^2-nél rövidebb és egy legalább 2021^2 hosszúságú vektor összege. (3 pont)

Megjegyzés: A megoldások csak az évszámok paritását használták ki, tehát a feladat állítása nyilvánvalóan igaz 2022 és 2023 helyett bármilyen páros, illetve páratlan természetes számmal.

4. feladat

Két bolha, Anett és Balázs ül a koordináta-rendszer egy-egy rácspontján. Anett az origóból indul, és kezdetben, illetve minden lépés után a $(0,1)$ vektor irányába néz. Balázs az (x,y) rácspontból indul, kezdetben ő is a $(0,1)$ vektor irányába néz, ám ő minden lépés után abba az irányba néz, amerre haladt a lépés során. Minden lépésben mondunk egy irányt a bolháknak (jobbra, balra, előre vagy hátra), és mindkét bolha egységnyit ugrik a megadott irányban a nézési irányához képest. Például ha az első három lépésben a jobbra, balra és előre irányokat mondjuk, akkor Anett az $(1,0)$, $(0,0)$, $(0,1)$ pontokat járja be, míg Balázs az $(x+1,y)$, $(x+1,y+1)$, $(x+1,y+2)$ pontokat. Melyek azok az (x,y) számpárok, melyekre lehetséges, hogy valahány lépés után ugyanazon a rácsponton fog ülni Anett és Balázs?

Megoldás:

Válasz: Pontosan akkor tud Anett és Balázs eljutni ugyanarra a rácspontra, ha $x+y$ páros. Máshogy mondva, ha sakktáblaszerűen színezzük a rácspontokat, akkor ugyanolyan színűről kell indulniuk.

Amennyiben ez nem teljesül, akkor nem tudnak eljutni egymáshoz, mivel minden ugrás után változik a helyzetük koordinátáinak összegének paritása (színt váltanak), így mivel eredetileg különböző volt (különböző színen álltak), ezért sosem juthatnak ugyanoda. (1 pont)

Most belátjuk, hogy ha $x+y$ páros, akkor lehetséges. Először is figyeljük meg, hogy valójában csak az egymáshoz viszonyított helyzetük számít, azaz mindig az $\overrightarrow{AB}$ vektort vizsgáljuk, ahol A Anett, B pedig Balázs pozíciója. Tegyük fel, hogy Anett és Balázs is a $(0,1)$ vektor irányába néz, és tekintsük a következő 4 ugráskombinációt. Figyeljük meg, hogy ezek után továbbra is mind a ketten a $(0,1)$ irányba fognak nézni, valamint

Anett az origóban marad, és vizsgáljuk meg, hogy hova kerül Balázs, vagyis hogyan változik közben $\overrightarrow{AB}$.

1. Jobbra, balra, balra, jobbra: Balázs $(0, 2)$-vel mozdul el, így $\overrightarrow{AB}$ is $(0, 2)$-vel változik. (1 pont)
2. Hátra, előre, előre, hátra: Balázs a $(0, -2)$-vel mozdul el, így $\overrightarrow{AB}$ is $(0, -2)$-vel változik. (1 pont)
3. Jobbra, balra: Balázs az $(1, 1)$ vektorral mozdul el, így $\overrightarrow{AB}$ is $(1, 1)$-gyel változik. (1 pont)
4. Balra, jobbra: Balázs a $(-1, 1)$ vektorral mozdul el, így $\overrightarrow{AB}$ is $(-1, 1)$-gyel változik. (1 pont)

Használjuk csak ezt a négyféle kombinációt, már ezekkel is el tudnak jutni egymáshoz. Ha az x-koordinátájuk nem egyezik meg, akkor a 3. vagy 4. kombinációt addig alkalmazzuk, míg meg nem egyezik, azaz míg $\overrightarrow{AB}$ első koordinátája 0 nem lesz. Ezek után az 1. vagy 2. ugrássorozatot addig alkalmazzuk, amíg egy mezőre nem kerülnek. Ez meg fog történni, mivel minden kombináció után 2-vel közelednek egymáshoz, és a kiinduló feltételezésünk szerint $\overrightarrow{AB}$ koordinátáinak összege mindig páros. Tehát tényleg el tud jutni egymáshoz Anett és Balázs. (2 pont)

Megjegyzés. Az 1. kombináció a 3. és 4. egymás utáni alkalmazása.

További útmutató a pontozáshoz:
Ha a két bolhát egymáshoz közelebb juttatja (de arról semmit nem mond, hogy utána milyen irányba fognak nézni). (1 pont)

Ha talál egy olyan c konstanst, melyre a bolhákat mindig tudja úgy mozgatni, hogy utána legfeljebb c távolságra legyenek (akkor is jár, ha nem mondja ki expliciten, hogy talált ilyen c-t). (Ez a részpontszám az előzővel nem adódik össze.) (2 pont)

5. feladat

Igazoljuk, hogy tetszőleges n pozitív egész szám esetén fennáll az alábbi egyenlőség:

$$n! = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}(-1)^{i+j}\binom{n}{i}\binom{n}{j}\binom{ij}{n}.$$

(Ha $ij < n$, akkor az $\binom{ij}{n}$ binomiális együttható értéke 0.)

Megoldás: Azt fogjuk igazolni, hogy az egyenlőség mindkét oldalán olyan kifejezés áll, ami azt adja meg, hogy egy $n \times n$-es táblázat n mezőjét hányféleképpen lehet úgy kiválasztani, hogy semelyik kettő ne legyen egy sorban vagy egy oszlopban. Ez a bal oldal ($n!$) esetén világos. (1 pont)

Legyen $\mathcal{S}$ az $n \times n$-es táblázat mezői halmazának n elemű részhalmazaiból álló halmaz. A táblázat sorait és oszlopait számozzuk meg az $1, 2, \ldots, n$ sorszámokkal. Ha $I, J \subseteq [n] := \{1, 2, \ldots, n\}$, akkor jelölje $\mathcal{S}_{I,J}$ az olyan $\mathcal{S}$-beli elemek halmazát, melyekre mind az n mező I-beli indexű sorokban és J-beli indexű oszlopokban található. Világos, hogy $|\mathcal{S}_{I,J}| = \binom{|I|\cdot|J|}{n}$. (1 pont)

Tekintsük most a

$$\sum_{\emptyset \neq I \subseteq [n]} \sum_{\emptyset \neq J \subseteq [n]} (-1)^{|I|+|J|} |\mathcal{S}_{I,J}|$$

összeget. Ennek értéke egyrészt megegyezik a bizonyítandó egyenlőség jobb oldalán álló összeggel, hiszen csoportosíthatjuk a tagokat úgy, hogy egybevonjuk az $|I| = i$, $|J| = j$ méretű indexpárokhoz tartozó tagokat. (2 pont)

Másrészről viszont megmutatjuk, hogy ez az olyan $\mathcal{S}$-beli n-esek száma, amikor mind az n mező különböző sorban és különböző oszlopban található. Legyenek ugyanis $1 \leq k \leq n$, $1 \leq \ell \leq n$, és határozzuk meg, hányszor számolunk egy olyan $s \in \mathcal{S}$-et, melynek mezői pontosan k sorban és pontosan ℓ oszlopban helyezkednek el. A sorokat, illetve oszlopokat megadó indexhalmazok legyenek I_0 és J_0, ahol tehát $|I_0| = k$ és $|J_0| = \ell$. Írjuk fel, hogy a kérdéses s-et a fenti előjeles összegben hányszor számoljuk:

$$\sum_{I_0 \subseteq I \subseteq [n]} \sum_{J_0 \subseteq J \subseteq [n]} (-1)^{|I|+|J|} = \left(\sum_{I_0 \subseteq I \subseteq [n]} (-1)^{|I|} \right) \left(\sum_{J_0 \subseteq J \subseteq [n]} (-1)^{|J|} \right). \qquad \text{(2 pont)}$$

Ha $I_0 \neq [n]$, akkor az első összeg 0, mert az $[n] \setminus I_0$ halmaznak ugyanannyi páros elemszámú részhalmaza van, mint páratlan elemszámú. (Hiszen ezek párba állíthatók úgy, hogy a pár két tagja egyedül egy rögzített $[n] \setminus I_0$-beli elemben térjen el.) Így a $(-1)^{|I|} = (-1)^{|I_0|}(-1)^{|I \setminus I_0|}$ számok összege 0.

Ehhez teljesen hasonlóan, ha $J_0 \neq [n]$, akkor a második összeg 0. Ez azt jelenti, hogy s-et 0-szor számoljuk, kivéve ha $I_0 = J_0 = [n]$. Utóbbi eset annak felel meg, amikor az s-beli mezők pontosan n sorban és n oszlopban helyezkednek el, az összeg értéke pedig $(-1)^n(-1)^n = 1$. Mindez csak úgy teljesülhet, ha az n mező közül semelyik kettő nincs egy sorban vagy egy oszlopban, amint azt korábban állítottuk.

Ezzel a feladat állításának bizonyítását befejeztük. (1 pont)