OKTATÁSI HIVATAL

# A 2022/2023. tanévi
# Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
# döntő forduló

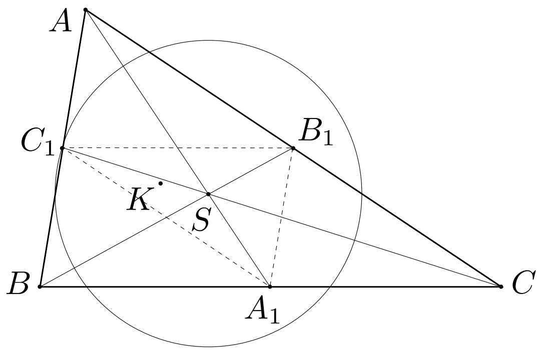
## MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
## (a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

## MEGOLDÁSOK

### 1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy bármely háromszögben a beírt kör középpontjának a súlyponttól mért távolsága kisebb, mint a háromszög leghosszabb oldalának a harmada.

**Első megoldás:** Legyenek $A$, $B$, $C$ a háromszög csúcsai, $A_1$, $B_1$, $C_1$ rendre a szemközti oldalak felezőpontjai, $K$ a beírt kör középpontja, $S$ pedig a súlypont. A beírt kör átmérője nyilvánvalóan kisebb a háromszög bármelyik magasságánál, ezért a $K$ pont a három középvonal által közrefogott $A_1B_1C_1$ háromszög belsejében van.



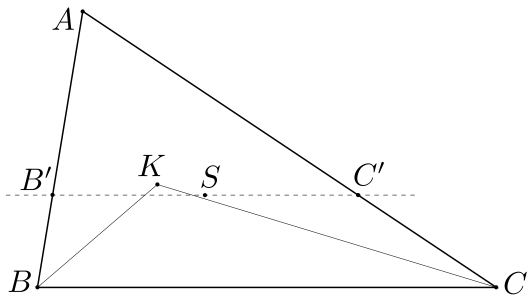

Az $ABC$ háromszöget az $S$ középpontú, $-1/2$ arányú középpontos hasonlóság viszi az $A_1B_1C_1$ háromszögbe, ezért az utóbbinak a súlypontja ugyancsak az $S$ pont, és mindegyik súlyvonala az $ABC$ háromszög megfelelő súlyvonalának a fele. Az $A_1$, $B_1$, $C_1$ pontokat, és így az egész $A_1B_1C_1$ háromszöget lefedi az az $S$ középpontú kör, amelynek a sugara az $A_1B_1C_1$ háromszög leghosszabb súlyvonalának a 2/3 része, vagyis az $ABC$ háromszög leghosszabb súlyvonalának a harmada. Emiatt a $KS$ távolság kisebb az $ABC$ háromszög leghosszabb súlyvonalának a harmadánál. Ebből a feladat állítása rögtön következik, hiszen bármelyik súlyvonalhoz lehet annál hosszabb háromszögoldalt találni, például a két közrefogó oldal közül legalább az egyik biztosan ilyen.

**Második megoldás:** Legyen az $ABC$ háromszögben $K$ a beírt kör középpontja és $S$ a súlypont. Húzzunk az oldalakkal párhuzamos egyeneseket az $S$ ponton keresztül. Az ezek által levágott három darab háromszög együtt lefedi az $ABC$ háromszöget, ezért valamelyikük, például az ábra szerinti $AB'C'$ háromszög, tartalmazza a $K$ pontot.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-22-A0002 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program




Azt állítjuk, hogy ekkor a $KS$ távolság kisebb a $B'C'$ távolság felénél. Innen már könnyen következik a feladat állítása, hiszen $B'C'$-t az $A$ középpontú, $3/2$ arányú hasonlóság viszi $BC$-be, tehát $KS$ kisebb $BC$ harmadánál, és így persze a legnagyobb oldal harmadánál is.

Ha a $K$ pont a $B'C'$ szakaszra illeszkedik, akkor, mivel $B'C'$-nek $S$ a felezőpontja, rögtön adódik, hogy $KS < B'C'/2$. Ha pedig $K$ az $AB'C'$ háromszög belsejébe esik, akkor azt állítjuk, hogy a $B'KC'$ szög tompaszög. Ebből ugyancsak a $KS < B'C'/2$ egyenlőtlenség következik, mert ekkor $K$ a $B'C'$ szakasz Thalész-körének belső pontja, és ezért a kör sugaránál kisebb távolságra van az $S$ középponttól.

Jelölje $\alpha$, $\beta$, $\gamma$ az $ABC$ háromszög szögét rendre $A$-nál, $B$-nél és $C$-nél. Ekkor $BKC\sphericalangle = 180° - \beta/2 - \gamma/2 = 90° + \alpha/2$ miatt a $BKC$ szög tompaszög. A $B'KC'$ szög pedig ennél nagyobb, tehát az is valóban tompaszög.

*Megjegyzés:* Nem lehet olyan $1/3$-nál kisebb $\lambda$ konstanst találni, amellyel bármely háromszögben teljesül, hogy a beírt kör középpontja és a súlypont távolsága a legnagyobb oldal $\lambda$-szorosánál kisebb. Ha ugyanis a háromszög oldalai 1, 1 és $\varepsilon$ hosszúságúak, akkor a két szóban forgó pont távolsága $1/3$-hoz tetszőlegesen közel lehet, ha $\varepsilon$-t elegendően kicsinek választjuk.

## 2. feladat

Legyen $a_0$ tetszőleges egész szám és tekintsük az $a_{n+1} = a_n^2 + 1$ $(n \geq 0)$ rekurzióval definiált sorozatot. Mutassuk meg, hogy az $a_1, a_2, \ldots$ számoknak együttvéve végtelen sok különböző prímosztója van.

### Megoldás:

A feladatot általánosabban oldjuk meg, a következő állítást bizonyítjuk:

*Legyen $f$ egész együtthatós polinom, amelynek egynél több nem nulla tagja van, $a_0$ tetszőleges egész, és tekintsük az $a_{n+1} = f(a_n)$ rekurzióval definiált sorozatot. Igazoljuk, hogy ha a sorozatnak végtelen sok különböző tagja van, akkor az $a_1, a_2, \ldots$ számoknak együttvéve végtelen sok különböző prímosztója van.*

Ebből a feladat állítása azonnal következik, hiszen $f(x) = x^2 + 1$ esetén $a_n < a_n^2 + 1 = a_{n+1}$ alapján a sorozat ebben az esetben szigorúan monoton növekedő, és így tagjai páronként különbözők.

A megoldás során többször is részsorozatot képzünk majd. Ha egy részsorozatban előfordul végtelen sok prímosztó, akkor az egész sorozatban is. Speciálisan olyan részsorozatokat fogunk tekinteni, ahol az indexek egy $uk + v$ számtani sorozatot alkotnak $(u > 0,\ v \geq 0,\ k = 0, 1, \ldots)$. Legyen $f_1(x) = f(x)$ és $n \geq 1$-re $f_{n+1}(x) = f\big(f_n(x)\big)$. Akkor az $uk + v$ indexekhez tartozó részsorozat a $b_{k+1} = f_u(b_k)$ rekurzióval kapható, ahol $b_0 = a_v$. Belátjuk, hogy az $f_u(x)$ polinomnak szintén legalább két tagja van, tehát ez a feltétel öröklődik.

Nevezzünk egy polinomot monomnak, ha csak egy tagja van, vagyis $cx^k$ alakú, ahol $c \neq 0$. Megmutatjuk, hogy ha $f$ és $g$ nem konstans polinomok, akkor $f\big(g(x)\big)$ pontosan akkor monom, ha $f$ és $g$ is monom.

Legyen az $f(x)$ polinom legmagasabb fokú tagja $c_m x^m$, a legalacsonyabb fokú $c_r x^r$, ugyanez $g(x)$ esetében $d_n x^n$, illetve $d_s x^s$. Ekkor $f\big(g(x)\big)$ legmagasabb fokú tagja $c_m d_n^m x^{nm}$, a legalacsonyabb fokú pedig (helyettesítsünk $1/x$-et) $c_r d_s^r x^{sr}$. Ha $f\big(g(x)\big)$ monom, akkor $nm = sr$. Nyilván $nm \geq nr \geq sr$, és egyenlőség csak akkor lehet, ha $n(m-r) = 0$ és $(n-s)r = 0$. Ha $n = 0$, akkor $n = s = 0$ és $g$ konstans. Ha $n \neq 0$, akkor $m = r$, tehát $f$ monom, és vagy $n = s$, azaz $g$ is monom, vagy $r = 0$, vagyis az $f$ monom foka nulla, és így $f$ konstans.

Beláttuk tehát, hogy az $uk + v$ indexekhez tartozó részsorozatot generáló polinom sem lehet monom. Tegyük föl, hogy ennek a részsorozatnak csak véges sok tagja van. Ha $n > v$, akkor legyen $uk + v < n \leq u(k+1) + v$ és $t = n - (uk + v)$. Nyilván $1 < t \leq u$, és $a_n = f_t(a_{uk+v})$. Ezért az $a_n$ sorozat elég nagy tagjai megkaphatók e részsorozat tagjaiból úgy, hogy a véges sok $f_1, \ldots, f_u$ polinom valamelyikébe helyettesítünk, és így összesen csak véges sokféle számot kaphatunk. Ez ellentmond annak a feltételünknek, hogy az $a_n$ sorozatnak végtelen sok különböző tagja van. Így beláttuk, hogy az indexek tetszőleges $uk + v$ alakú sorozatára áttérve a feladat feltételei öröklődnek.

Legyen $m$ tetszőleges modulus. Ekkor az $a_n$ sorozatot modulo $m$ vizsgálva csak véges sok értéket kapunk. Tehát lesz ismétlődés, és onnantól kezdve a maradékok sorozata periodikus. Ez azt jelenti, hogy ha az $r$ maradékot az $a_n$ sorozat legalább kétszer felveszi modulo $m$, akkor van egy olyan végtelen számtani részsorozata az indexeknek, amely mentén a sorozat minden tagja $r$ maradékot ad $m$-mel osztva.

Tegyük föl indirekten, hogy a sorozat tagjainak együttvéve csak véges sok prímosztója van, legyen ezek egyike $p$. Ha van olyan $k$, hogy modulo $p^k$ valamelyik nem nulla maradék legalább kétszer előfordul, akkor térjünk át az előzőek szerint az indexek megfelelő részsorozatára. Az új sorozat tagjai már nem oszthatók $p^k$-val. Ismételjük az eljárást $k$ helyett $(k-1)$-gyel. Végül egy olyan $\ell$ számig jutunk, amelyben már csak véges sok $p^\ell$-lel nem osztható tag szerepel, de egyik tag sem osztható $p^{\ell+1}$-gyel. A kivételes tagokat elhagyva (azaz $uk + v$-ben $v$ értékét növelve) olyan számtani részsorozathoz jutunk, amelyben minden számban a $p$ kitevője ugyanaz az $\ell$ szám (ami 0 is lehet).

Végezzük el ezt minden $p$-re, amelyre lehetséges, az ilyen prímeket hívjuk pirosnak. Ha egy adott $p$ nem piros, akkor minden $k$ esetén a sorozat tagjai véges sok kivétellel oszthatók $p^k$-val.

Az így kapott $b_n$ részsorozathoz tartozó polinom legyen $g(x) = x^m\big(xh(x) + c\big)$, ahol $c \neq 0$. Vizsgáljuk meg a $b_{n+1} = b_n^m\big(b_n h(b_n) + c\big)$ egyenletben $p$ kitevőjét. Ha $p$ nem piros, akkor legyen $k$ olyan, hogy $p^k$ nem osztója $c$-nek. Elég nagy $n$-et választva $p^k$ osztója $b_n$-nek, és ezért $b_n h(b_n) + c$ nem osztható $p^k$-val. Ha $p$ piros, és a hozzá tartozó kitevő $\ell$, akkor $p^{\ell+1}$ nem lehet osztója $(b_n h(b_n) + c)$-nek, mert különben $p^{\ell+1}$ osztaná $b_{n+1}$-et.

Mivel a sorozat tagjainak másmilyen prímosztója nincs, $b_n h(b_n) + c$ korlátos. De akkor $xh(x) + c$ az egészek egy végtelen részhalmazán korlátos, ezért ez a polinom konstans, azaz $h = 0$, és akkor $g$ monom. Ezzel a végső ellentmondással az állítást beláttuk.

## 3. feladat

Legyenek $a_1, a_2, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_n$ olyan pozitív egész számok, amelyekre az

$$\frac{a_1}{b_1}, \quad \frac{a_2}{b_2}, \quad \ldots, \quad \frac{a_n}{b_n}$$

törtek értéke páronként különböző. Bizonyítsuk be, hogy

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) \geq \frac{n^3}{16}.$$

**Megoldás:**

Legyen a $b_i$ számok között a legnagyobb $T$, és $1 \leq i \leq T$ esetén jelölje $t_i$, hogy $b_1, b_2, \ldots, b_n$ között hányszor szerepel az $i$. Világos, hogy $t_1 + t_2 + \cdots + t_T = n$ és $b_1 + b_2 + \cdots + b_n = t_1 + 2t_2 + \cdots + Tt_T$.

Mivel a törtek különbözők, ezért az $i$ nevezőjű törtek számlálója mind különböző, így ezen számlálók összege legalább $1 + 2 + \cdots + t_i = \frac{t_i^2 + t_i}{2}$, és ezért

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n \geq \frac{t_1^2 + t_1}{2} + \cdots + \frac{t_T^2 + t_T}{2} > \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_T^2).$$

Az eddigiek alapján

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > \frac{1}{2}(t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_T^2)(t_1 + 2t_2 + \cdots + Tt_T).$$

Legyen $j$ a legkisebb index, melyre $t_1 + \cdots + t_j \geq n/2$. Ekkor

$$t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_T^2 \geq t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_j^2 \geq j \left( \frac{t_1 + t_2 + \cdots + t_j}{j} \right)^2 \geq \frac{n^2}{4j}$$

a számtani és a négyzetes közepek közötti egyenlőtlenség alapján, továbbá

$$t_1 + 2t_2 + \cdots + Tt_T \geq jt_j + \cdots + Tt_T \geq j(t_j + \cdots + t_T) > \frac{jn}{2}.$$

A kapott egyenlőtlenségek szorzatát véve kapjuk, hogy

$$(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)(b_1 + b_2 + \cdots + b_n) > \frac{1}{2} \cdot \frac{n^2}{4j} \cdot \frac{jn}{2} = \frac{n^3}{16}.$$

*Megjegyzés:* A megoldás során valójában csak azt használtuk fel, hogy az $(a_i, b_i)$ rendezett párok különbözők. Az $1/16$ konstanson könnyen javíthatunk: definiáljuk $j$-t úgy, mint a legkisebb index, melyre $t_1 + \cdots + t_j \geq 2n/3$. Ekkor a megoldás lépéseit követve a $t_1^2 + t_2^2 + \cdots + t_T^2 \geq \frac{4n^2}{9j}$ és $t_1 + 2t_2 + \cdots + Tt_T > \frac{jn}{3}$ becslések alapján a $\frac{2}{27}n^3$ alsó becsléshez jutunk.