OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny első forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(gimnázium)
Javítási-értékelési útmutató

1. feladat Tekintsük a pozitív egész számokat 1-től 2023-ig, az 1-et és a 2023-at is beleértve. Ki szeretnénk hagyni közülük három egymást követőt úgy, hogy a megmaradt számok átlaga egész szám legyen. Mely számokat hagyhatjuk ki?

Megoldás: A számok összege 1-től 2023-ig, az 1-et és a 2023-at is beleértve (például a Gauss féle módszert alkalmazva):

$$1 + 2 + 3 + ... + 2023 = \frac{2023 \cdot 2024}{2}.$$ 1 pont

Jelölje a három egymás utáni kihagyott szám közül a középsőt x, a megmaradt számok átlagát pedig N. A kihagyott három szám összege $(x-1) + x + (x+1) = 3x$. 1 pont

Ekkor

$$\frac{\frac{2023 \cdot 2024}{2} - 3x}{2020} = N \quad \text{azaz} \quad 2023 \cdot 1012 - 3x = 2020 \cdot N. \tag{1}$$

1 pont

Mivel $2 \leq x \leq 2022$, ezért $2023 \cdot 1012 - 6066 \leq 2020 \cdot N \leq 2023 \cdot 1012 - 6$. A feladat szövege szerint N egész szám, ebből az adódik, hogy $N = 1011, 1012, 1013$ lehet. 2 pont

Ezeket (1)-be helyettesítve $N = 1012$ esetén lesz x egész. Így a kihagyott három szám csak az 1011, 1012 és 1013 lehet. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. feladat Melyek azok a pozitív egész számok, amelyeket fel lehet írni két (nem feltétlenül különböző) pozitív racionális szám összegeként és ugyanezen két racionális szám szorzataként is?

Megoldás: Jelölje a feladat szövegében szereplő pozitív egész számot n, a két pozitív racionális számot pedig a és b. Ekkor $n = a + b$, amiből $b = n - a$. Ezt helyettesítsük be a a feladat szövege szerinti $n = ab$ egyenletbe, kapjuk $n = a(n - a)$, azaz

$$a^2 - na + n = 0. \tag{2}$$

1 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Ez egy másodfokú egyenlet a-ra nézve, amelynek diszkriminánsa $D = n^2 - 4n$. A $D \geq 0$ és $n > 0$ feltételek akkor teljesülnek, ha $n \geq 4$. 1 pont

Mivel a racionális, ezért $\sqrt{D}$ is racionális, azaz léteznek olyan t és s egészek, amelyekre $(t; s) = 1$, továbbá

$$D = n(n-4) = \frac{t^2}{s^2}.$$

Ekkor $s^2 \cdot n(n-4) = t^2$, s^2 és t^2 prímtényezős felbontásában minden prím kitevője páros, így a számelmélet alaptétele miatt $n(n-4)$ prímtényezős felbontásában is minden prím kitevője páros, azaz $n(n-4)$ négyzetszám. 2 pont

Ha $n > 4$, akkor

$$(n-3)^2 = n^2 - 6n + 9 < n^2 - 4n = D < n^2 - 4n + 4 = (n-2)^2,$$

azaz D két szomszédos négyzetszám között van, tehát nem lehet négyzetszám. 2 pont

Ha $n = 4$, akkor (2) pozitív gyöke az $a = 2$ és $b = n - a$ miatt $b = 2$. Azt kaptuk, hogy a feladat egyetlen lehetséges megoldása az $n = 4$ és a hozzá tartozó két racionális szám az $a = b = 2$. 1 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: (i) Amennyiben a versenyző megadja az $n = 4$ és $a = b = 2$ megoldást, de nem bizonyítja, hogy más megoldás nem lehet, 1 pontot kap.

(ii) A versenyző megkaphatja a 7 pontot, ha hivatkozik arra, de külön nem bizonyítja, hogy a D egész szám gyöke csak akkor lehet racionális, ha D négyzetszám.

3. feladat Egy 2024 oldalú szabályos sokszög csúcsait valamelyiktől kezdve sorban egymás után megbetűzzük, jelölje őket A_1, A_2, A_3, ..., A_{2024}, így A_1 és A_{2024} szomszédosak. Legyen $A_1A_2 = a$, $A_1A_3 = b$ és $A_1A_{1012} = c$. Igazoljuk, hogy

$$\frac{1}{a^2} + \frac{1}{c^2} = \frac{4}{b^2}.$$

Megoldás: Legyen a szabályos sokszög köré írt kör középpontja O, sugara R. Ekkor az A_1A_2O háromszög hasonló az $A_1A_3A_{1014}$ háromszöghöz, mivel mindkettő egyenlőszárú és a szárak által bezárt szög a középponti és kerületi szögek tétele miatt egyenlő. 2 pont

A két hasonló háromszög megfelelő oldalainak aránya egyenlő, ezeket felírjuk a feladat szövegében szereplő jelölésekkel

$$\frac{R}{a} = \frac{c}{b}, \quad \text{amiből} \quad R = \frac{ac}{b}.$$ 1 pont

Az $A_1A_{1012}A_{1013}$ háromszögben A_1A_{1013} a köré írt kör átmérője, tehát Thalesz tétele miatt derékszögű. Felírjuk rá a Pitagorasz tételt:

$$a^2 + c^2 = (2R)^2.$$ 2 pont

Ez utóbbi egyenletbe írjuk be a hasonló háromszögekből kapott értéket R helyére

$$a^2 + c^2 = \frac{4(ac)^2}{b^2}.$$

Leosztunk a nem nulla $(ac)^2$-tel és a bizonyítandó állítást kapjuk

$$\frac{1}{a^2}+\frac{1}{c^2}=\frac{4}{b^2}.$$ 2 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Legyen $d(M)$ a pozitív egész M szám összes pozitív osztóinak száma, beleszámolva az 1-et és magát M-et is. Egy 2023-nál kisebb pozitív egész N számot pontosan két prím oszt, a 2 és a 3. Mi lehet N, ha

$$d(N^2)=d(2N)+d(3N)+13?$$

Megoldás: Ha $M=p_1^{k_1}\cdot\ldots\cdot p_s^{k_s}$, akkor M minden osztójában az i-dik prím kitevője 0,1,..., k_i lehet, azaz egymástól függetlenül (k_i+1) különböző érték lehet. Ezért

$$d(M)=(k_1+1)\cdot\ldots\cdot(k_s+1).$$

1 pont

Legyen az N szám prímtényezős felbontása $N=2^x\cdot 3^y$. Ekkor $N^2=2^{2x}\cdot 3^{2y}$, továbbá $2N=2^{x+1}\cdot 3^y$ és $3N=2^x\cdot 3^{y+1}$. Az osztók számára vonatkozó feltételünk szerint

$$(2x+1)(2y+1)=(x+2)(y+1)+(x+1)(y+2)+13.$$ 1 pont

A zárójeleket felbontva és rendezve $2xy-x-y=16$. Kettővel beszorozva és mindkét oldalhoz 1-et adva

$$4xy-2x-2y+1=33,$$

a bal oldalt szorzattá alakítva

$$(2x-1)(2y-1)=33.$$ 2 pont

A bal oldalon álló két tényező pozitív, a 33 prímtényezős felbontása $3\cdot 11$, így a lehetséges osztópárok: $1\cdot 33$ és $3\cdot 11$ illetve $33\cdot 1$ és $11\cdot 3$. 2 pont

A lehetséges osztópárokból adódó x és y értékeket végignézve és figyelembe véve a feladat szövege szerinti $N<2023$ feltételt egyetlen megoldás van, az $x=6$ és $y=2$.

A feladat feltételeit egyetlen szám teljesíti, az $N=576=2^6\cdot 3^2$. 1 pont

Összesen: 7 pont.

5. feladat Egy dobókockát négyszer feldobva mennyi a valószínűsége, hogy (a) a dobott számok szorzata osztható 30-cal; (b) a dobott számok összege osztható öttel?

Megoldás: Mindkét esetben a klasszikus modell alapján határozzuk meg a valószínűséget: a kedvező esetek számát osztjuk az összes eset számával. Mivel négyszer dobunk egymás után és mind a négy dobás egymástól függetlenül egyenlő eséllyel 6 féle lehet, ezért az összes eset száma 6^4. 1 pont

(a) A dobott számok szorzata pontosan akkor osztható 30-cal, ha osztható a 2, 3, és 5 mindegyikével, hiszen ezek a számok relatív prímek és szorzatuk 30. Legyen a 2-vel nem osztható szorzatot adó dobássorozatok halmaza A, a 3-mal nem oszthatók halmaza B, az 5-tel nem oszthatók halmaza C. A keresett események száma a logikai szita formula alapján

$$6^4 - |A| - |B| - |C| + |A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C| - |A \cap B \cap C|.$$ 1 pont

A dobások szorzata pontosan akkor nem osztható 2-vel, ha minden dobott szám páratlan –az 1, 3, 5 valamelyike– ezért $|A| = 3^4$. Készítünk ennek mintájára egy összefoglaló táblázatot. Minden sorban először megadjuk a vizsgált halmazt, mellette szerepel, hogy miket dobhatunk ahhoz, hogy az eredmény ebbe a halmazba tartozzon, végül megadjuk a sornak megfelelő halmaz elemszámát:

A	1, 3, 5	3^4
B	1, 2, 4, 5	4^4
C	1, 2, 3, 4, 6	5^4
$A \cap B$	1, 5	2^4
$A \cap C$	1, 3	2^4
$B \cap C$	1, 2, 4	3^4
$A \cap B \cap C$	1	1^4

1 pont

A logikai szitából kiszámolva $6^4 - 3^4 - 4^4 - 5^4 + 2^4 + 2^4 + 3^4 - 1^4 = 446$, tehát annak a valószínűsége, hogy a dobott számok szorzata osztható 30-cal $446/1296 \approx 0.344$. 1 pont

(b) Egyetlen olyan dobássorozat van, amelyben minden dobott szám a 6. Ekkor a dobások összegének ötös maradéka 4. Ezt az esetet tegyük félre s vizsgáljuk a többit.

A további dobássorozatok száma 6^4-1, ezek mindegyikében van nem 6-os szám. Azt állítjuk, hogy minden lehetséges ötös maradék ugyanannyiszor fordul elő, így az esetek ötödében lesz a dobások összege öttel osztható. 1 pont

Tekintsünk egy tetszőleges dobássorozatot. Ebben legyen a legelső nem 6-os dobás a k-ik. Most a k-iktól különböző összes eredményt rögzítjük, a k-ik dobás értékét pedig végigfuttatjuk az 1, 2, 3, 4, 5 számok mindegyikén. Így éppen öt dobássorozatot kapunk, ezek ötös maradéka mind különböző. Ezek szerint az ötös maradékok szerinti minden csoporthoz éppen $(6^4 - 1)/5$ dobássorozat tartozik.

A feladat kérdésére a válasz $\frac{\frac{6^4-1}{5}}{6^4} = \frac{259}{1296}$. 2 pont

Összesen: 7 pont.