OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
második forduló

MATEMATIKA II. KATEGÓRIA
(gimnázium)
Javítási-értékelési útmutató

1. feladat Egy adatbázisban hat pozitív egész van, ezek módusza 10, mediánja 12, átlaga 15. Legalább mekkora a szórás, ha az átlagtól vett átlagos abszolút eltérés 6-nál nagyobb?

Megoldás: Jelölje a hat számot $0 < a \le b \le c \le d \le e \le f$. A medián definíciója alapján $(c+d)/2 = 12$, így $c \le 12$ és $12 \le d$. Mivel az adatoknak egyetlen módusza van, ezért a 10 a leggyakrabban előforduló szám. Mivel $12 \le d$, ezért két eset lehetséges: (i) $a = b = c = 10$, vagy (ii) két darab 10-es van, a többi szám pedig páronként mind különböző.

1 pont

(i) Ebben az esetben $d = 14$, az átlag miatt pedig $(3 \cdot 10 + 14 + e + f)/6 = 15$, azaz $e + f = 46$, tehát $f = 46 - e$. Az átlagtól vett átlagos abszolút eltérésre vonatkozó feltétel szerint

$$\frac{3 \cdot |10-15| + |14-15| + |e-15| + |(46-e)-15|}{6} > 6.$$

Ebből adódik, hogy $|e-15|+|31-e| > 20$. A bal oldal esetünkben nem lehet 20-nál nagyobb, hiszen $14 \le e \le 23$. Így $e = 14$ esetén $|e-15| + |31-e| = 18$, $14 < e \le 23$ esetén pedig $|e-15| + |31-e| = 16$.

2 pont

(ii) Ha $a = b = 10$, akkor $c = 11$ és $d = 13$, ekkor az e és f számokra pontosan ugyanazok a feltételek teljesülnek, mint az (i) esetben.

1 pont

Már csak az az eset maradt, ha $a < 10$, $b = c = 10$ és $d = 14$. Ekkor $a + e + f = 56$, az átlagtól vett átlagos abszolút eltérésre vonatkozó feltétel szerint

$$\frac{|a-15| + 2 \cdot |10-15| + |14-15| + |e-15| + |(46-e)-15|}{6} > 6. \qquad (1)$$

Mivel $a < 15$, e és f is legalább 15, így a bal oldal számlálójában

$$|a-15| + |e-15| + |f-15| = (15-a) + (e-15) + (f-15) = (a+e+f-2a) - 15 =$$

$$= (56-2a) - 15 = 41 - 2a.$$

Ezt beírva (1)-be és 6-tal szorozva kapjuk, hogy $52 - 2a > 36$, amiből $a < 8$.

1 pont

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

A szórás akkor lesz a legkisebb, ha $a = 7$, $e = 24$ és $f = 25$ és ekkor az értéke

$$\sqrt{\frac{(7-15)^2 + 2\cdot(10-15)^2 + (14-15)^2 + (24-15)^2 + (25-15)^2}{6}} = 2\cdot\sqrt{\frac{37}{3}}.$$

Vizsgáljuk meg ugyanis a szórás kifejezésében az a, e és f értékétől függő részeket a gyökjel alatt álló tört számlálójában. Amennyiben a értékét rögzítjük, ezzel együtt $e + f$ értékét is megadjuk. Legyen a két legnagyobb szám átlaga $(e+f)/2 = g$ és $e = g-x$, $f = g+x$. Mivel egyetlen módusz van, ezért $x > 0$. A szórásban $((g-x)-15)^2+((g+x)-15)^2 = (g-15)^2+x^2$ az x változó szigorúan moonoton növő függvénye, ezért a szórás akkor a legkisebb, ha e és f minél közelebb van egymáshoz. Ha g törtrésze 0 vagy 1/2, akkor ennek megfelelően x rendre 1 vagy 1/2. Ebből, és az $a < 8$ feltételből kaptuk meg a szórás legkisebb értékét.

Az adatbázis számainak az adott feltételek mellett a szórása legalább $2\cdot\sqrt{\frac{37}{3}}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

2. feladat Határozzuk meg az összes olyan $(x; y)$ egészekből álló számpárt, amelyekre teljesül az alábbi egyenlet:

$$x^2(y-1) + y^2(x-1) = 1$$

Megoldás: Átalakítva az egyenletet $x^2y-x^2+y^2x-y^2 = 1$, ami átrendezhető a következő alakba:

$$xy(x+y+2) - (x+y)^2 = 1.$$ 1 pont

Vezessük be az $a = xy$ és $b = x + y$ jelöléseket, ekkor az egyenlet $a(b+2) - b^2 = 1$, amiből

$$a = \frac{b^2+1}{b+2} = \frac{b^2-4+5}{b+2} = b-2+\frac{5}{b+2}.$$ 2 pont

Ezért $b + 2$ az 5 valamely osztója, a lehetséges értékek: -5, -1, 1, 5. 1 pont

Ebből a lehetséges $(a; b)$ értékpárok: (-10;-7), (-10;-3), (2;-1), (2;3). 1 pont

Visszaírva ezeket kapunk négy másodfokú egyenletrendszert $(x; y)$-ra, ebből kettőnek lesznek egészek a megoldásai. A feladatban szereplő egyenlet a következő $(x; y)$ számpárok esetén teljesül: (-5;2), (2;-5), (1;2) és (2;1). 2 pont

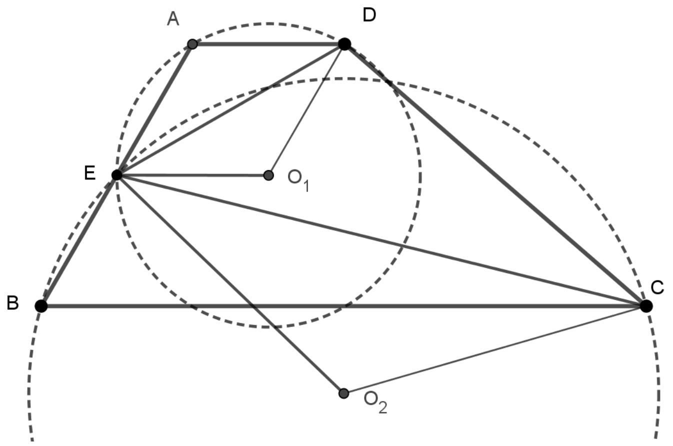
Összesen: 7 pont

3. feladat Az $ABCD$ trapéz AD oldala párhuzamos a BC oldallal, az A csúcsánál levő szöge 120°-os, az AB oldal felezőpontja legyen E. Az EAD háromszög köré írható kör középpontja legyen O_1, a BEC háromszög köré írható kör középpontja legyen O_2. Hányad része az EO_1O_2 háromszög területe az $ABCD$ trapéz területének?

Megoldás: Ábránknak megfelelően irányított szögekkel dolgozunk. Az $XYZ\angle$ azt az irányított szöget jelölje, amivel az Y-ból induló YX félegyenest Y körül forgatva az YZ félegyenesbe jutunk. Ábránknak megfelelően tekintsük pozitív iránynak a $CBE\angle$ szöget, ekkor ugyanígy pozitv szög lesz $CED\angle$ és $EAD\angle$.

Az O_1 középpontú körben az ED húrhoz tartozó kerületi szög $EAD\angle = 120°$, így a megfelelő középponti szög 240°. Tekintsük az O_1ED háromszöget, ez egyenlő szárú, O_1-nél a szöge 120°, így $O_1ED\angle = 30°$ és oldalainak aránya

$$\frac{O_1E}{ED} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$ 2 pont



Hasonlóan az O_2 középpontú körben a CE húrhoz tartozó kerületi szög $CBE\angle = 60°$, a megfelelő középponti szög $120°$, amiből $O_2EC\angle = 30°$ és

$$\frac{O_2E}{EC} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

A fentiekből következik, hogy EO_1O_2 háromszög hasonló az EDC háromszöghöz és a hasonlóság aránya $1 : \sqrt{3}$. A területeik aránya a hasonlóság arányának négyzete, azaz $1 : 3$. 2 pont

Jelölje a trapéz magasságát m. Ekkor a trapéz területe

$$T_{ABCD} = T_{ABC} + T_{ACD} = \frac{BC \cdot m}{2} + \frac{AD \cdot m}{2} = 2(T_{EBC} + T_{EAD}).$$

Azt kaptuk, hogy $T_{EBC} + T_{EAD}$ a trapéz területének a fele. Ezt a két háromszöget kivonva a trapézból kapjuk, hogy T_{EDC} is a trapéz területének a fele. 2 pont

Így az EO_1O_2 háromszög területe a trapéz területének felének a harmada, azaz a trapéz területének a hatoda. 1 pont

Összesen: 7 pont

4. feladat Az $x \neq 0$ olyan valós szám, amelyre $x^4 + \dfrac{1}{x^4}$ és $x^5 + \dfrac{1}{x^5}$ is racionális számok. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $x + \dfrac{1}{x}$ szintén racionális szám.

Megoldás: Vezessük be a

$$T_k = x^k + \frac{1}{x^k}$$

jelölést, ahol k pozitív egész szám. Ha T_k racionális, akkor T_{2k} is az, hiszen $T_{2k} = T_k^2 - 2$. Mivel T_4 és T_5 is racionális, így az iménti észrevétel alapján T_8 és T_{10} is racionális. 2 pont

Vegyük észre, hogy

$$T_4T_2 = T_6 + T_2, \quad \text{és} \quad T_8T_2 = T_{10} + T_6,$$

ezekből $T_{10} = T_8T_2 - T_6 = T_2(T_8 - T_4 + 1)$. 2 pont

Ebből adódik, hogy T_2 racionális, ezért T_6 is racionális. 1 pont

Tekintettel arra, hogy $T_5T_1 = T_4 + T_6$, következik, hogy T_1 értéke is racionális. 2 pont

Összesen: 7 pont