



OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi  
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny  
első forduló  
MATEMATIKA III. KATEGÓRIA  
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

FELADATLAP

**1. feladat**

Mely pozitív egész számok egyeznek meg a 3-as számrendszerbeli alakjuk számjegyei szorzatának kétszeresével?

**2. feladat**

Egy háromszög oldalainak hossza legyen  $a$ ,  $b$  és  $c$ . Jelölje rendre  $t_a$ ,  $t_b$ ,  $t_c$  az oldalegyeneseken a magasságtalppont és az oldalfelezőpont közötti távolságot. Bizonyítsuk be, hogy az  $a \cdot t_a$ ,  $b \cdot t_b$ ,  $c \cdot t_c$  szorzatok egyike egyenlő a másik kettő összegével.

**3. feladat**

Igazoljuk, hogy minden  $n$  nemnegatív egész számra

$$\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{4n+2} \rfloor = \lfloor \sqrt{9n+3} \rfloor.$$

(Itt  $\lfloor x \rfloor$  az  $x$  egészrészét jelöli, azaz a legnagyobb  $k$  egész számot, melyre  $k \leq x$ .)

**4. feladat**

Egy seregszemplén 100 katona sorakozik fel egymás mellett, balról jobbra magasság szerint növekvő sorrendben. Valamilyen sorrendben minden katonának felolvassák a nevét. Az a katona, aki a saját nevét hallja, helyet cserél a bal oldali szomszédjával, kivéve ha a sor bal szélén áll, ebben az esetben nem mozdul. Hány különböző sorrendben állhatnak a katonák a felolvasás végén?

**5. feladat**

Legyen  $m$  pozitív egész szám. Az  $M = \{0, 1, \dots, m-1\}$  halmazon tekintsük a  $\ominus$  jelölésű modulo  $m$  kivonást, azaz

$$a \ominus b = \begin{cases} a - b, & \text{ha } a \geq b, \\ a - b + m, & \text{ha } a < b. \end{cases}$$

Legyen  $B$  az  $M$  egy  $k$  elemű részhalmaza, és tegyük fel, hogy vannak olyan  $a, b \in B$  nem feltétlenül különböző elemek, melyekre  $a \ominus b \notin B$ . Mutassuk meg, hogy ekkor a  $B$  elemeiből képezhető  $k^2$  darab modulo  $m$  különbség közül legfeljebb  $k^2 - k + 1$  lehet  $B$ -beli.

---

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja



KULTURÁLIS ÉS INNOVÁCIÓS  
MINISZTERIUM

 Nemzeti  
Tehetség Program