OKTATÁSI HIVATAL

A 2023/2024. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
döntő

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

MEGOLDÁSOK

1. feladat

Legfeljebb hány egész koordinátájú pont adható meg a térben úgy, hogy mindegyik egyenlő távolságra legyen az origótól, és bármely kettő az origóval együtt egyenlő területű háromszöget alkosson?

Megoldás:

Azt fogjuk belátni, hogy négy pont megadható így, de több nem. Legyenek A, B, C, D a feladatnak megfelelő tulajdonságú pontok az origó középpontú G gömbön, és $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ rendre az ezekbe a pontokba mutató helyvektorok. Megmutatjuk, hogy e négy vektor egyeneseinek a G gömbbel vett metszéspontjai kockát alkotnak.

Legyen a G gömb sugara r és jelölje θ az OA és OB egyenesek szögét ($0 \leq \theta \leq 90°$). Ekkor az OAB háromszög területe $r^2 \sin(\theta)/2$. Így az $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ vektorok közül bármely kettőnek a szöge θ vagy $180° - \theta$, és bármely kettő egyenesének szöge θ. Megjegyezzük, hogy nem lehet $\theta = 90°$, ugyanis a térben legfeljebb három páronként merőleges egyenes adható meg. Képzeljük ezt a négy vektort egy gráf csúcsainak, húzzunk be egy piros élet akkor, ha a megfelelő két vektor szöge θ, kéket pedig ha a szögük $180° - \theta$.

Ha az A pontot helyettesítjük az origóra vett tükörképével (vagyis $\mathbf{a}$-t az ellentettjére cseréljük), akkor a kapott pontrendszer nyilván szintén teljesíti a feltételeket. A csere során az $\mathbf{a}$-nak megfelelő csúcsból kiinduló piros élek kékké, a kékek pedig pirossá változnak. Ha valamelyik csúcsból legfeljebb egy (azaz 0 vagy 1) piros él indul ki, akkor itt cserélve ebből a csúcsból legalább kettő (tehát 2 vagy 3) piros él fog kiindulni, tehát a piros élek száma nő. Ezért cserék sorozatával (legfeljebb hat cserével) elérhető, hogy minden csúcsból legalább 2 piros él induljon. Ha minden csúcsból pontosan 2 piros él (és így egyetlen kék él) indul, akkor a gráf két diszjunkt kék élet, és egy négy hosszúságú piros kört tartalmaz. Ezért az egyik kék él két végpontjánál cserélve minden él kékké változik. Ha valamelyik csúcsból három piros él indul, akkor a piros fokszámokat összeadva a piros élek száma legalább $(2+2+2+3)/2 > 4$, és ezért vagy minden él piros, vagy egyetlen kék él és öt piros él van. Összefoglalva, alkalmas cseréket végrehajtva összesen három lehetőség van: vagy minden él kék, vagy minden él piros, vagy egy kék és öt piros él van. Az első két esetben azt kapjuk, hogy $ABCD$ szabályos tetraéder, mivel ekkor bármely két pont egyenlő távolságra van, hiszen az $OAB, OAC, OAD, OBC, OBD, OCD$ háromszögek mind egybevágók. (Ez egyben azt is jelenti, hogy a második eset valójában nem lehetséges: a szabályos tetraéder esetén a kérdéses szög tompaszög, így valójában nem lehet minden él piros.) A csúcsok origóra való tükrözésével a keresett kockát kapjuk.

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-23 projekt támogatja

Kulturális és Innovációs Minisztérium

Nemzeti Tehetség Program

Megmutatjuk, hogy a harmadik eset nem valósítható meg egész vektorokkal. Legyen az egyetlen kék él $\mathbf{a}$ és $\mathbf{c}$ között. Ekkor bármely két különböző vektorunk skaláris szorzata ugyanaz az s szám, azzal a kivétellel, hogy $\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = -s$. Azt is tudjuk, hogy mindegyik vektor önmagával vett skaláris szorzata r^2. Legyen $\mathbf{u} = \mathbf{a}+\mathbf{c}$, $\mathbf{v} = \mathbf{b}+\mathbf{d}$, $\mathbf{w} = \mathbf{a}-\mathbf{c}$ és $\mathbf{z} = \mathbf{b}-\mathbf{d}$. Világos, hogy $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ és $\mathbf{d}$ közül semelyik kettő nem egyenlő, vagy egymás ellentettje, így az $\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}$ és $\mathbf{z}$ vektorok közül egyik sem 0. Figyeljük meg a következőket:

$$\begin{aligned}
\mathbf{u}\cdot\mathbf{w} &= \mathbf{a}^2 - \mathbf{c}^2 = 0,\\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{z} &= \mathbf{b}^2 - \mathbf{d}^2 = 0,\\
\mathbf{u}\cdot\mathbf{z} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 0,\\
\mathbf{v}\cdot\mathbf{w} &= \mathbf{b}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{b}\cdot\mathbf{c} + \mathbf{d}\cdot\mathbf{a} - \mathbf{d}\cdot\mathbf{c} = 0,\\
\mathbf{w}\cdot\mathbf{z} &= \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} - \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} - \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 0.
\end{aligned}$$

Ez azt jelenti, hogy $\mathbf{w}$ és $\mathbf{z}$ merőleges egymásra, és mindkettőre merőleges $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$, azaz $\mathbf{u}$ és $\mathbf{v}$ párhuzamosak. Emiatt létezik egy λ szám, melyre $\mathbf{u} = \lambda\mathbf{v}$, továbbá λ racionális, mivel a pontok egész koordinátájúak. Figyeljük meg, hogy

$$\mathbf{u}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{a}\cdot\mathbf{d} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{b} + \mathbf{c}\cdot\mathbf{d} = 4s = (\mathbf{b}^2 + \mathbf{d}^2 - \mathbf{a}^2 - \mathbf{c}^2) + 2\mathbf{b}\cdot\mathbf{d} - 2\mathbf{a}\cdot\mathbf{c} = \mathbf{v}^2 - \mathbf{u}^2.$$

Ebbe behelyettesítve, $\lambda\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^2 - \lambda^2\mathbf{v}^2$, azaz $\lambda = 1 - \lambda^2$. Megoldva, $\lambda = (-1 \pm \sqrt{5})/2$, ami ellentmond annak, hogy λ racionális.

Beláttuk tehát, hogy $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{d}$ egyeneseinek a G gömbbel vett metszéspontjai kockát alkotnak, amiből következik, hogy 5 pont már nem adható meg a kívánt tulajdonsággal, hiszen egy G-be írt kocka bármely két átellenes csúcsa közül csak az egyik választható. Négy megfelelő pont például $(1, 1, 1)$, $(1, -1, -1)$, $(-1, 1, -1)$, $(-1, -1, 1)$, ezek olyan $\sqrt{3}$ hosszúságú vektorok, melyek közül bármely kettő távolsága $\sqrt{8}$.

Megjegyzés: Valós koordinátájú vektorokkal a harmadik eset is megvalósítható, az ikozaéder alkalmas négy csúcsa vehető, két nem egybevágó módon is. Az origó középpontú ikozaédernek valójában hat csúcsa is kiválasztható úgy, hogy bármely kettő az origóval együtt egyenlő területű háromszöget alkosson: mindegyik szemköztes csúcspárból az egyiket vehetjük. (Ekkor azonban az egész koordinátákra vonatkozó feltétel sérül.)

2. feladat

Egy lakótelepről néhány gyerek szakkörre jár. A szakkörök résztvevői között fiú és lány is van, és minden fiú pontosan p, minden lány pontosan q szakkörre jár, ahol p és q pozitív egész számok, továbbá bármely fiú-lány pár legföljebb egy közös szakkört látogat. Tudjuk továbbá, hogy bármely két szakkör esetén az elsőre pontosan akkor jár több fiú, mint a másodikra, ha lány is több jár az elsőre, mint a másodikra. Legalább hány szakkörnek kell lennie? (A választ p és q függvényében adjuk meg.)

Első megoldás:

Azt fogjuk bizonyítani, hogy a válasz pq.

Legyen a szakkörök halmaza $\{S_1, \ldots, S_n\}$, a fiúké és lányoké pedig rendre $\{F_1, \ldots, F_s\}$ és $\{L_1, \ldots, L_t\}$. Azt, hogy az egyes fiúk, illetve lányok mely szakkörökre járnak leírhatjuk az $\mathbf{f}_i = (f_i^1, \ldots, f_i^n)$ és $\mathbf{l}_j = (\ell_j^1, \ldots, \ell_j^n)$ (úgynevezett karakterisztikus) vektorokkal:

$$f_i^k = \begin{cases} 0, & \text{ha } F_i \text{ nem jár az } S_k \text{ szakkörre} \\ 1, & \text{ha } F_i \text{ jár az } S_k \text{ szakkörre} \end{cases} \qquad \ell_j^k = \begin{cases} 0, & \text{ha } L_j \text{ nem jár az } S_k \text{ szakkörre} \\ 1, & \text{ha } L_j \text{ jár az } S_k \text{ szakkörre} \end{cases}$$

(A fölső indexek jelen megoldásban nem kitevőket jelölnek.) Ekkor a föltételeink alapján minden $\mathbf{f}_i$ vektorban pontosan p darab, és minden $\mathbf{l}_j$ vektorban pontosan q darab 1-es koordináta van (a többi koordináta pedig 0).

Ezekből képzett összegekként kapjuk továbbá az

$$\mathbf{f} = \sum_{i=1}^{s} \mathbf{f}_i = (f^1, \dots, f^n), \qquad \mathbf{l} = \sum_{j=1}^{t} \mathbf{l}_j = (\ell^1, \dots, \ell^n)$$

vektorokat, melyek k-adik koordinátája azt adja meg, hogy az S_k szakkörre hány fiú, illetve hány lány jár. Így tehát tudjuk, hogy a két vektorban a koordináták közti nagyság szerinti sorrend ugyanaz (vagyis $f^{k_1} \geq \dots \geq f^{k_n}$ és $\ell^{k_1} \geq \dots \geq \ell^{k_n}$ is teljesül az $1, \dots, n$ számok valamely $k_1, \dots, k_n$ sorba rendezésére). Így a Csebisev-egyenlőtlenség (vagy n darab rendezési egyenlőtlenség összege) szerint a kettejük skaláris szorzata

$$\mathbf{f} \cdot \mathbf{l} = \sum_{k=1}^{n} f^k \ell^k \geq \frac{(f^1 + \dots + f^n)(\ell^1 + \dots + \ell^n)}{n} = \frac{sp \cdot tq}{n},$$

ahol az utolsó egyenlőségnél azt használtuk, hogy

$$\sum_{k=1}^{n} f^k = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{s} f_i^k = \sum_{i=1}^{s} \sum_{k=1}^{n} f_i^k = s \cdot p$$

és hasonlóképpen $\sum_k \ell^k = t \cdot q$.

Másrészt viszont $\mathbf{f} \cdot \mathbf{l} = \sum f^k \ell^k$ azon fiú-lány-szakkör hármasokat számolja le, ahol a fiú és a lány is az adott szakkörre jár — azt márpedig tudjuk, hogy egy adott fiú-lány párhoz legföljebb csak egyetlen ilyen létezhet, vagyis $\mathbf{f} \cdot \mathbf{l} \leq s \cdot t$.

Az előbbiekkel összevetve kapjuk, hogy $n \geq pq$.

Ez pedig meg is valósítható. Legyen összesen $n = pq$ szakkör, q fiú és p lány. A szakkörök mindegyikébe járjon pontosan 1 fiú és 1 lány: az összes lehetséges fiú-lány párhoz tartozzon egy szakkör, melyre éppen ők ketten járnak. Könnyű ellenőrizni, hogy ez teljesíti a feladat föltételeit, vagyis a szakkörök számának minimuma valóban pq.

Második megoldás:

Legyen n szakkör, ezeken a fiúk száma rendre $f^1, \dots, f^n$, a lányok száma pedig $\ell^1, \dots, \ell^n$. Tudjuk, hogy $f^i \geq f^j$ pontosan akkor, ha $\ell^i \geq \ell^j$, így

$$0 \leq \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (f^i - f^j)(\ell^i - \ell^j) = 2n \sum_i f^i \ell^i - 2\Big(\sum_i f^i\Big)\Big(\sum_j \ell^j\Big) \leq 2\Big(\sum_i f^i\Big)\Big(\sum_j \ell^j\Big)\Big(\frac{n}{pq} - 1\Big),$$

ahol az utolsó egyenlőtlenségnél — az előző megoldáshoz hasonlóan — azt használtuk, hogy bármely fiú-lány pár legfeljebb egy közös szakkört látogat, így

$$\sum_i f^i \ell^i \leq \Big(\frac{1}{p} \sum_i f^i\Big) \cdot \Big(\frac{1}{q} \sum_j \ell^j\Big),$$

ahol a jobb oldalon a fiúk és lányok számának szorzata áll (az egy-egy fiú, illetve lány által látogatott szakkörök számára vonatkozó föltétel szerint).

A kapott egyenlőtlenség alapján $n \geq pq$, a becslés élességét igazoló konstrukció pedig az első megoldásban leírt módon kapható.

Megjegyzés: Ez a megoldás lényegében ugyanarra épül, mint az első, de a karakterisztikus vektorok konkrét — egyébként természetesen adódó — bevezetése nélkül, közvetlenebbül használjuk ki a rendezési föltételt.

3. feladat

Legyenek k és ℓ pozitív egész számok, $a_1 \le a_2 \le \ldots \le a_k$ és $b_1 \le b_2 \le \ldots \le b_\ell$ pozitív egész számok, végül legyen $q(x)$ egy legalább elsőfokú, egész együtthatós polinom. Tegyük föl, hogy minden n pozitív egész számra $a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n + q(n)$ osztója a $b_1^n + b_2^n + \cdots + b_\ell^n + q(n)$ számnak. Bizonyítsuk be, hogy ekkor $k = \ell$ és $a_i = b_i$ minden $1 \le i \le k$ esetén.

Megoldás:

A feladatbeli állítást indirekt úton igazoljuk. Amennyiben nem igaz a feladat állítása, akkor vagy $k \neq \ell$, vagy $k = \ell$, de valamely $1 \le i \le k$ esetén $a_i \neq b_i$.

Először is bebizonyítjuk, hogy az indirekt feltevésünkből szükségképpen következik egy olyan pozitív egész m kitevő létezése, melyre teljesül, hogy

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_k^m \neq b_1^m + b_2^m + \cdots + b_\ell^m.$$

Ha ilyen m nem létezne, akkor bármely pozitív egész n kitevő esetén igaz lenne, hogy

$$a_1^n + a_2^n + \cdots + a_k^n = b_1^n + b_2^n + \cdots + b_\ell^n.$$

Hasonlítsuk össze egymással az a_k és a b_ℓ számokat (tehát a legnagyobbakat). Ha mondjuk a_k kisebb volna b_ℓ-nél, akkor a fenti összefüggésből a_k^n-nel való osztással kapnánk, hogy minden pozitív egész n-re fennáll az

$$\left(\frac{a_1}{a_k}\right)^n + \left(\frac{a_2}{a_k}\right)^n + \cdots + \left(\frac{a_k}{a_k}\right)^n = \left(\frac{b_1}{a_k}\right)^n + \left(\frac{b_2}{a_k}\right)^n + \cdots + \left(\frac{b_\ell}{a_k}\right)^n$$

egyenlőség. Mivel feltételezésünk szerint a_k kisebb b_ℓ-nél, ezért az n végtelenhez tartása mellett a bal oldalon álló kifejezés mint sorozat konvergens, hiszen ott k darab konvergens sorozat összege szerepel, ugyanakkor a jobb oldal plusz végtelenhez tart, hiszen ott pozitív számok összege áll, és $\left(\frac{b_\ell}{a_k}\right)^n$ a végtelenhez tart. Ugyanilyen módon kezelhető az az eset is, amikor a_k nagyobb b_ℓ-nél.

Tehát amennyiben nem létezik a szóban forgó m kitevő, akkor a_k biztosan egyenlő b_ℓ-lel. Ekkor azonban a fenti gondolatmenet ismételt alkalmazásával kapható, hogy a második legnagyobb elemek is biztosan egyenlők lennének egymással, azaz $a_{k-1} = b_{\ell-1}$ teljesülne. Így továbbhaladva azt kapnánk, hogy $k = \ell$ és minden $1 \le i \le k$-ra $a_i = b_i$, ezért a megfelelő m kitevő valóban létezik.

Rögzítsünk tehát egy olyan m kitevőt, amire igaz, hogy

$$a_1^m + a_2^m + \cdots + a_k^m \neq b_1^m + b_2^m + \cdots + b_\ell^m.$$

Most tekintsük a $q(n) + a_1^m + a_2^m + \cdots + a_k^m$ alakú számok prímosztóinak halmazát, ahol az n szám végigfut a pozitív egészeken. Megmutatjuk, hogy bármely legalább elsőfokú, egész együtthatós polinom pozitív egész helyeken vett helyettesítési értékeinek lehetséges prímosztói végtelen sokan vannak. Legyen $f(x)$ egy ilyen polinom, és indirekten tegyük fel, hogy minden pozitív egész helyen csak olyan értékeket vesz fel, melyek prímosztói a $p_1, p_2, \ldots, p_r$ közül kerülnek ki. Ekkor $f(1) = \pm p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_r^{\alpha_r}$ valamely nemnegatív egész $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ kitevőkkel. (Megjegyezzük, hogy indirekt feltevésünk miatt speciálisan $f(1) \neq 0$, hiszen $f(1) = 0$ már önmagában végtelen sok prímosztót adna.) Minden pozitív egész c számra teljesül, hogy $f(1 + c p_1^{\alpha_1+1} p_2^{\alpha_2+1} \ldots p_r^{\alpha_r+1})$ nem osztható $p_1^{\alpha_1+1}, \ldots, p_r^{\alpha_r+1}$ egyikével sem, ugyanis egész együtthatós $f(x)$ polinom esetén $f(x)$ adott M számmal való osztási maradékát meghatározza az x szám M-es maradéka, viszont $f(1)$ a felsorolt prímhatványok egyikével sem osztható. Indirekt feltevésünk szerint így $f(1+cp_1^{\alpha_1+1}p_2^{\alpha_2+1}\dots p_r^{\alpha_r+1})$ értéke csak $\pm p_1^{\beta_1}p_2^{\beta_2}\dots p_r^{\beta_r}$ alakú lehet, ahol $0 \le \beta_i \le \alpha_i$ egészek. Mivel f legalább elsőfokú, így minden értéket csak véges sokszor vehet el, ezzel viszont ellentmondásra jutottunk, hiszen c megválasztására végtelen sok lehetőségünk van.

Ezt az állítást alkalmazva kapjuk, hogy biztosan létezik olyan p prímszám, ami nem osztója az

$$(a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m) - (b_1^m + b_2^m + \dots + b_\ell^m)$$

különbségnek, de osztója valamelyik $q(n) + a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m$ alakú számnak. Rögzítsünk egy ilyen p prímszámot, és legyen w egy olyan pozitív egész, amire teljesül, hogy $q(w) + a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m$ osztható p-vel. A kínai maradéktétel miatt létezik olyan N pozitív egész, amire $N - w$ többszöröse p-nek, illetve $N - m$ többszöröse $(p-1)$-nek. A kis Fermat-tétel miatt az a_i^N és a_i^m számok $(1 \le i \le k)$, valamint a b_j^N és b_j^m számok $(1 \le j \le \ell)$ páronként ugyanazt a maradékot adják p-vel osztva, mert $m \ge 1$ és $p - 1 \mid N - m$. Ezt, valamint azt használva, hogy a $q(x)$ polinom p szerint periodikus modulo p kapjuk, hogy

$$a_1^N + a_2^N + \dots + a_k^N + q(N) \equiv a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m + q(w) \equiv 0 \pmod p,$$

illetve

$$b_1^N + b_2^N + \dots + b_\ell^N + q(N) \equiv b_1^m + b_2^m + \dots + b_\ell^m + q(w) \pmod p.$$

Ugyanakkor tudjuk, hogy $b_1^m + b_2^m + \dots + b_\ell^m + q(w)$ nem adhatja ugyanazt a maradékot p-vel osztva, mint $a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m + q(w)$, hiszen a p prímszám definíciója alapján nem osztója az

$$(a_1^m + a_2^m + \dots + a_k^m) - (b_1^m + b_2^m + \dots + b_\ell^m)$$

különbségnek.

Ez viszont azt jelenti, hogy N-re nem teljesül a feladatban megfogalmazott oszthatósági feltétel, hiszen $p \mid a_1^N + a_2^N + \dots + a_k^N + q(N)$, de $p \nmid b_1^N + b_2^N + \dots + b_\ell^N + q(N)$. Tehát ellentmondásra jutottunk, így a feladat állítása igaz.