OKTATÁSI HIVATAL

A 2024/2025. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

MATEMATIKA III. KATEGÓRIA
(a speciális tanterv szerint haladó gimnazisták)

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

Kérjük a javító tanárokat, hogy a feladatok javításakor vegyék figyelembe a versenyzők számára kiadott tájékoztatót. Külön is felhívjuk szíves figyelmüket arra, hogy minden feladatra csak egy helyes megoldásért jár a megfelelő pontszám. Kérjük, hogy a dolgozatokon konkrétan jelezzék a hibákat és az egyes feladatokra adott pontszámot, a dolgozat kijavítása után pedig töltsék ki a dolgozathoz mellékelt értékelő lap rovatait. A dolgozatokat nem kell osztályzattal minősíteni. A pontszámok indokolt esetben bonthatók. Azt, hogy egy részpontszámot a javítási-értékelési útmutatóban szereplő melyik megoldás melyik részpontszámaként – vagy annak egy részeként – adnak meg, jelezhetik a megfelelő részpontszámra történő $\alpha, \beta, \ldots$ görög betűkkel jelölt hivatkozással (pl. Második megoldás β részpontszámából 1 pont).

A III. kategóriában versenyző tanulók dolgozatait 12 ponttól kell továbbküldeni az iskolákból, közvetlenül az OKTV Matematika III., Oktatási Hivatal, 1363 Budapest, Pf. 84. címre. A feltételeknek megfelelő dolgozatok közül azonban csak azok küldhetők tovább, amelyek tartalmazzák legalább két feladat lényegében teljes (5–7 pontos) megoldását. Tájékoztatásul megjegyezzük, hogy a versenykiírás alapján a versenybizottság legfeljebb 50 versenyzőt juttathat be a döntőbe.

A pontozási útmutatóban nem szereplő más helyes megoldás vagy megoldásrészlet esetén az arányos pontszámot szíveskedjenek megadni.

Budapest, 2024. november   A versenybizottság

1. feladat

A k_1 és k_2 körök a P pontban kívülről érintik egymást, egyik közös (külső) érintőjük rendre az A_1 és A_2, a másik pedig a B_1 és B_2 pontokban érinti a k_1, illetve a k_2 kört. Bizonyítsuk be, hogy a PA_1A_2 és PB_1B_2 háromszögek köré írt körök érintik egymást.

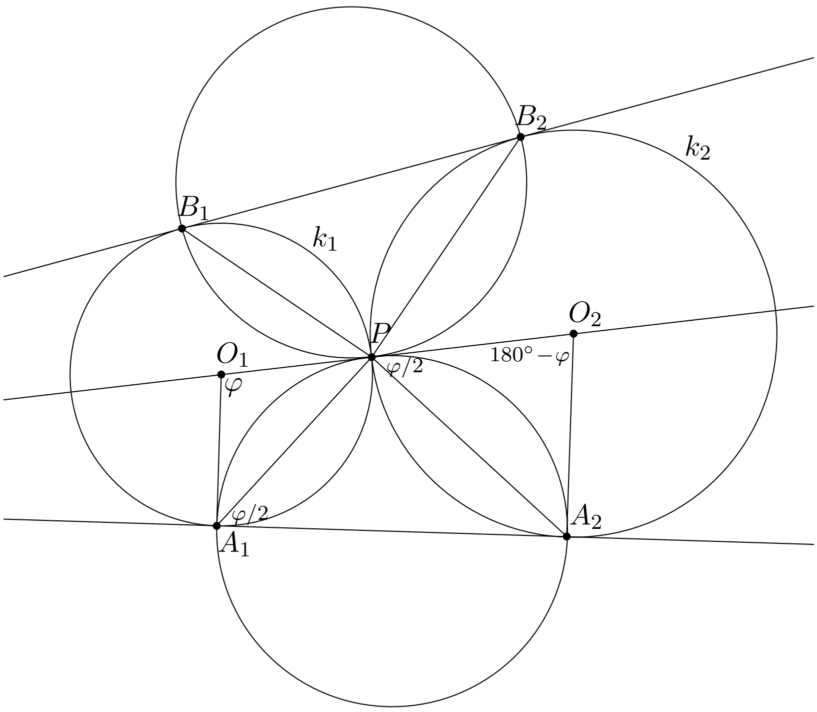
Megoldás:

Legyen a k_1 kör középpontja O_1, a k_2 köré O_2. Ekkor P az O_1O_2 szakaszon fekszik. Jelölje φ az A_1O_1P szöget. Ez a k_1 körben az A_1P húrhoz tartozó középponti szög, így ennek fele a PA_1A_2 érintőszárú kerületi szög, azaz $PA_1A_2\sphericalangle = \varphi/2$. (2 pont)$^\alpha$

Az O_1A_1 és az O_2A_2 szakaszok párhuzamosságából $PO_2A_2\sphericalangle = 180^\circ - \varphi$. (1 pont)$^\beta$

Az O_2A_2P háromszög egyenlőszárú, ezért $O_2PA_2\sphericalangle = \varphi/2$. (1 pont)$^\gamma$

Az Országos Középiskolai Tanulmányi Versenyek megvalósulását az NTP-TMV-M-24 projekt támogatja



A PA_1A_2 háromszög köré írt körében a PA_2 húrhoz tartozó PA_1A_2 kerületi szög éppen megegyezik az O_2PA_2 szöggel, így ez utóbbi érintőszárú kerületi szög, és ezért az O_1O_2 egyenese érinti a PA_1A_2 háromszög körülírt körét. (2 pont)$^\delta$

Hasonlóan belátható, hogy az O_1O_2 egyenese a PB_1B_2 háromszög köré írt körét is érinti. Így a két körülírt kör érinti egymást P-ben. (1 pont)$^\varepsilon$

Megjegyzés. A feladat állítása akkor is teljesül, ha a k_1 és k_2 körök a P pontban nem érintik, hanem metszik egymást.

2. feladat

Legyen $n \geq 2$ egész szám. Határozzuk meg (n függvényében) azt a legkisebb c valós számot, melyre teljesül a következő. Ha n darab nemnegatív, legfeljebb 1 értékű valós számot írunk egy kör kerületére, akkor biztosan lehet találni két szomszédosat, melyek különbsége legfeljebb c.

Első megoldás:

Világos, hogy $c = 1$-re teljesül a feltétel, de semmilyen $c < 1$ valós számra nem, ha n páros. Ekkor ugyanis tudunk felváltva 0-kat és 1-eket írni. (1 pont)$^\alpha$

Ha n páratlan, akkor ez nem működik. Ha annyit módosítunk a konstrukción, hogy lerakunk egy 1/2-et, és azon kívül felváltva 0-kat és 1-eket írunk, akkor egy olyan konstrukciót kapunk, amiben a szomszédosak közötti minimális különbség 1/2, tehát $c \geq 1/2$. (1 pont)$^\beta$

Megmutatjuk, hogy $c = 1/2$-re viszont már teljesül a feltétel. Nevezzünk egy nemnegatív, legfeljebb 1 értékű számot kicsinek, ha értéke legfeljebb 1/2, és nagynak, ha nagyobb, mint 1/2. Ezzel a definícióval minden nemnegatív, legfeljebb 1 értékű szám vagy kicsi vagy nagy. Figyeljük meg, hogy bármely két kicsi szám különbsége legfeljebb 1/2, és hasonlóan, bármely két nagy szám különbsége is legfeljebb 1/2. Írjunk fel n nemnegatív, legfeljebb 1 értékű számot akárhogyan a kör kerületére. Vegyük észre, hogy lesz két szomszédos szám, akik vagy mindketten kicsik, vagy mindketten nagyok, mert n páratlan, így nem tudnak mindenhol váltakozva jönni a kicsi és a nagy számok. Tehát lesz két szomszédos szám, melyek különbsége legfeljebb 1/2, és éppen ezt akartuk megmutatni. (4 pont)$^{\gamma}$

Tehát páros n esetén a legkisebb ilyen érték $c = 1$, páratlan n esetén pedig $c = 1/2$. (1 pont)$^{\delta}$

Második megoldás:

Páratlan n esetén adunk egy másik lehetséges indoklást arra, hogy $c = 1/2$ teljesíti a feltételt, a páros eset és a páratlan esetben annak igazolása, hogy $c \geq 1/2$ az Első megoldásban írtak szerint itt is összesen 2 pontot ér. (1+1 pont)$^{\alpha,\beta}$

Megmutatjuk, hogy páratlan n esetén $c = 1/2$ nem javítható. Ha van két szomszédos szám, ami egyenlő, akkor van egy 0 különbség, így ezen esetek alapján csak $c \geq 0$-ra következtethetünk. Különben a kör kerületén pozitív irányban körbemenve, minden körre írt számnál nézzük meg, hogy nagyobb vagy kisebb az előzőnél. Ha páratlan sok szám van, akkor lesz két szomszédos növekedés vagy csökkenés. Ennek a két különbségnek az összege legfeljebb 1, így legalább az egyik különbség legfeljebb 1/2. (4 pont)$^{\gamma}$

Tehát páros n esetén a legkisebb ilyen érték $c = 1$, páratlan n esetén pedig $c = 1/2$. (1 pont)$^{\delta}$

3. feladat

Az (a_n) sorozatot a következő rekurzióval értelmezzük: $a_1 = 1$, és $n > 0$ esetén $a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 1$. Mutassuk meg, hogy

$$\frac{1}{2+a_1} + \frac{1}{2+a_2} + \cdots + \frac{1}{2+a_{2024}} < \frac{1}{2}.$$

Első megoldás:

Belátjuk, hogy minden n esetén

$$\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{2+a_i} = \frac{1}{1+a_{n+1}}.$$

Ebből világos, hogy következik az állítás $n = 2024$ választással, hiszen a sorozat elemei pozitív számok. (3 pont)$^{\alpha}$

Az állítást n-re vonatkozó indukcióval bizonyítjuk, az $n = 1$ esetet könnyű ellenőrizni. (1 pont)$^{\beta}$

Ha n-re már tudjuk, hogy teljesül az állítás, akkor

$$\frac{1}{2} - \sum_{i=1}^{n+1} \frac{1}{2+a_i} = \frac{1}{1+a_{n+1}} - \frac{1}{2+a_{n+1}} = \frac{(2+a_{n+1}) - (1+a_{n+1})}{(1+a_{n+1})(2+a_{n+1})} = \frac{1}{1+a_{n+2}}$$

a rekurzív képletből, éppen ahogy akartuk, ezzel az állításunkat igazoltuk. (3 pont)$^{\gamma}$

Második megoldás:

Növeljük a rekurzív képletben mindkét oldalt 1-gyel, ekkor azt kapjuk, hogy

$$1 + a_{n+1} = a_n^2 + 3a_n + 2.$$

Alakítsuk szorzattá a jobb oldalt mint másodfokú polinomot, tehát írjuk át a rekurziót úgy, hogy

$$1 + a_{n+1} = (1 + a_n)(2 + a_n).$$ (1 pont)$^{\alpha}$

Ha vesszük mindkét oldal reciprokát, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{1+a_{n+1}} = \frac{1}{(1+a_n)(2+a_n)}.$$

Alakítsuk át a jobb oldalt az alábbi módon:

$$\frac{1}{(1+a_n)\,(2+a_n)}=\frac{(2+a_n)-(1+a_n)}{(1+a_n)\,(2+a_n)}=\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{2+a_n}.$$

Ez alapján a rekurzív képlet ekvivalens módon átírható úgy, hogy

$$\frac{1}{2+a_n}=\frac{1}{1+a_n}-\frac{1}{1+a_{n+1}}.$$ (2 pont)$^\beta$

A fentiek alapján az összeg, amit felülről szeretnénk becsülni, az alábbi teleszkopikus összeggé alakítható:

$$\frac{1}{2+a_1}+\frac{1}{2+a_2}+\cdots+\frac{1}{2+a_{2024}}=$$
$$=\left(\frac{1}{1+a_1}-\frac{1}{1+a_2}\right)+\left(\frac{1}{1+a_2}-\frac{1}{1+a_3}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{1+a_{2024}}-\frac{1}{1+a_{2025}}\right)=$$
$$=\frac{1}{2}-\frac{1}{1+a_{2025}}.$$ (3 pont)$^\gamma$

Világos, hogy ez az összeg kisebb $\frac{1}{2}$-nél, hiszen a rekurzívan definiált (a_n) sorozat elemei mind pozitívak. (1 pont)$^\delta$

4. feladat

Tekintsünk az $n\times n$-es sakktáblán egy olyan figurát, amely csak egy mezőnyit léphet, és csak jobbra vagy fölfelé. Nevezzük kígyónak mezők egy ilyen figurával bejárható részhalmazát. Hányféleképpen lehet lefedni a teljes sakktáblát n darab kígyóval úgy, hogy közülük semelyik kettő nem tartalmaz közös mezőt?

Első megoldás:

Tekintsük a sakktábla „főátlóját”, azaz a bal felső sarokból a jobb alsó sarokba vezető átlót. Nyilvánvaló, hogy ennek semelyik két mezője nem eshet ugyanarra a kígyóra, ezért a fedéshez legalább n kígyó szükséges. Megmutatjuk, hogy a fedések keresett száma $(n!)^2$. Ehhez nyilván elég bebizonyítani, hogy a főátló fölötti (és hasonlóképpen az alatta levő) rész $n!$-féle módon bontható n darab kígyó diszjunkt uniójára: a két „térfél” egy-egy ilyen fedésében a főátló azonos mezőjében végződő kígyókat egyesítve kapjuk a teljes fedéseket. Mostantól a sakktáblának csak ezt az $(n^2+n)/2$ mezőjét tekintjük, ezt szeretnénk lefedni n kígyóval. (2 pont)$^\alpha$

A főátló mezőiről induló kígyókat számozzuk meg fölülről lefelé 1-től n-ig. Tekintsük a főátlóval párhuzamos, fölötte elhelyezkedő átlókat (a főátlóval együtt összesen n darabot), melyekre felbontható ez a fölső térfél. A kígyók egyesével lépdelhetnek ezeken a főátlótól távolodva, amíg egy ponton véget nem érnek. (1 pont)$^\beta$

Legyen $0\le k<n$ egész, és legyen adott egy kígyókkal való fedésben a főátló mezőiről induló n kígyó addig, amíg vagy eléri az ettől k-val jobbra levő, $n-k$ mezőből álló átlót, vagy véget ér hamarabb. Ezen átlóból — a főátlóhoz hasonlóan — mindegyik kígyó legföljebb egy mezőt tartalmazhat, tehát $n-k$ kígyó ért el eddig: legyenek ezek sorszámai fölülről lefelé $a_1,\ldots,a_{n-k}$. A következő lépésben ezek közül az egyik nem folytatódik, legyen ez az a_i sorszámú kígyó. Megmutatjuk, hogy az összes többi kígyó egyértelműen folytatódik, mégpedig úgy, hogy az a_1-es, …, (a_{i-1})-es kígyók mind jobbra lépnek, a többiek meg mind fölfelé. (1 pont)$^\gamma$

A kérdéses átló (fölülről számolva) i-edik mezője fölötti mezőre (ha ez még a tábla része, vagyis ha $i\ne 1$) csak az (a_{i-1})-es kígyó léphet tovább. Ekkor viszont az $(i-1)$-edik mező fölöttire az (a_{i-2})-esnek kell lépnie, és így tovább, tehát az a_1-es, …, (a_{i-1})-es kígyók mindegyikének egyértelmű (vízszintes) a következő lépése. Hasonlóképpen, az (a_{i+1})-es kígyónak kell elfoglalnia az i-edik mezőtől jobbra álló helyet, az (a_{i+2})-esnek az $(i+1)$-ediktől jobbra levőt, stb. Ekkor a következő átlóból is minden mező valóban le lesz fedve, tehát az i-t szabadon megválaszthatjuk, és a következő lépést ez a választás egyértelműen meghatározza. (2 pont)$^\delta$

Innen láthatjuk, hogy a fönt leírt, $(k+1)$-edik lépésnél pontosan $n-k$ választási lehetőségünk van. Így a fölső térfél n kígyóval való fedéseinek száma valóban $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$. (1 pont)$^\varepsilon$

Második megoldás:

Az előző megoldáshoz hasonlóan látjuk, elég azt belátni, hogy a főátló fölötti részt (magával a főátlóval együtt) $n!$-féleképpen fedhetjük le. (2 pont)$^\alpha$

Írjuk a főátló mezőire föntről lefelé az egész számokat 1-től n-ig: ezt a számozást terjesztjük ki úgy az egész fölső térfélre, hogy minden k-ra a k számmal jelzett mezők egy-egy kígyót adnak. A célunk annak a precíz megmutatása, hogy a $(k+1)$-edik kígyó az első k kígyó által lefedett terület alsó-jobboldali „peremén” kell, hogy haladjon.

Belátjuk, hogy mindegyik oszlopban a számok föntről lefelé monoton nőnek, továbbá hogy két egymás alatti mezőre írt szám csak akkor lehet egyenlő, ha a figura az alsóról a fölsőre lépett. Az első oszlopban ez igaz, hiszen itt egyetlen mező van csak (1-es számmal). Tegyük föl, hogy (balról számolva) az első k oszlopban igaz az állítás. Vegyünk a $(k+1)$-edik oszlopban egy b-vel számozott B mezőt, a közvetlenül alatta lévő C mező száma pedig legyen c. Ha a figura C-ről B-re lépett, akkor $b=c$. Ha nem, akkor a figura B-re a tőle balra lévő A mezőről lépett, aminek a száma tehát b. A C-re érkező figura vagy a főátló egyik E mezejéről indult, és végig fölfelé lépett (esetleg nulla lépést téve, amikor C maga a főátlón van és $C=E$), vagy pedig a k-adik oszlop egy D mezejéről lépett egyet jobbra, és utána tett néhány (esetleg nulla) lépést fölfelé, és úgy érkezett C-re. Az első esetben az E-től eggyel balra felfelé található F főátlóbeli mező van A alatt (vagy egyenlő A-val). Ekkor F száma $c-1(=k)$, ami az indukciós föltevés szerint legalább b, azaz $c>b$. A második esetben D az A alatt van a k-adik oszlopban, és föltevésünk szerint D száma (ami c), nagyobb vagy egyenlő, mint A száma (ami b). De $b=c$ nem állhat fönn, mert a k-adik oszlopra vonatkozó feltevésünk szerint ez csak akkor lenne lehetséges, ha a D mezőn álló figura végig fölfelé lépkedve A-ba érkezett volna, márpedig tudjuk, hogy D-ről a figura átlépett a $(k+1)$-edik oszlopba vízszintesen. Ezzel a monotonitási tulajdonságot beláttuk. (2 pont)$^\beta$

Fessük be pirosra az első $k-1$ kígyó által lefedett területet, kékre pedig minden oszlopban a legmagasabban lévő, nem piros mezőt. Legyen az $m \geq k$ a legnagyobb olyan szám, amelyre az m-edik oszlopban van k-val jelzett mező. Ekkor a k-adik kígyó pontosan a $k \leq i \leq m$-edik oszlopokat metszi (hiszen a k-adik oszlopban indul, és csak az $(i-1)$-edik oszlopból léphet át az i-edik oszlopba). Ha egy oszlopban van k-val számozott mező, akkor az oszlop kék mezeje is ilyen, hiszen ha a száma nagyobb lenne, akkor az összes nem piros mező száma is k-nál nagyobb lenne a monotonitás miatt, k-nál kisebb pedig nem lehet, mert azok a mezők pirosak. Vagyis a k számú mezők a $k \leq i \leq m$ oszlopokban vannak, mindegyikben a kék mező a legmagasabban fekvő pontjuk, a legalacsonyabb pedig az eggyel balra lévő oszlop kék mezejével van egy magasságban, ha $i>k$, illetve a főátló k-adik mezője, ha $i=k$.

Ezzel beláttuk, hogy ha az első $k-1$ kígyót már ismerjük, akkor a k-adik kígyót egyértelműen meghatározza az utolsó mezeje, ami az i-edik oszlopban a kék mező valamely $k \leq i \leq n$ index mellett. Ezért ezt a kígyót $(n-k+1)$-féleképpen választhatjuk ki. Ez $n(n-1)\cdot\ldots\cdot 1 = n!$ lehetőség. (2 pont)$^\gamma$

Meg kell még gondolni, hogy a kígyókat sorban így konstruálva tényleg a sakktábla fölső felének egy diszjunkt fedését kapjuk. A diszjunktság nyilvánvaló. Az első oszlopot nyilván lefedi az első kígyó. Ha már tudjuk, hogy az első k kígyó lefedi az első k oszlopot, akkor a $(k+1)$-edik kígyó a $(k+1)$-edik oszlop aljától indulva a $(k+1)$-edik oszlop kék mezejéig biztosan fölmegy (és onnan esetleg még továbblép jobbra), ezért lefedi a $(k+1)$-edik oszlop addig még le nem fedett részét. Így tehát valóban mindegyik oszlop le van fedve. (1 pont)$^{\delta}$

5. feladat

Mely pozitív páros számok azok, amelyek egyenlők az önmaguktól és az 1-től különböző pozitív osztóik összegével?

Megoldás:

Jelölje $\sigma(n)$ az n szám pozitív osztóinak az összegét. Ismeretes és könnyen látható, hogy ha n kanonikus alakja $p_1^{\alpha_1}\dots p_t^{\alpha_t}$, akkor $\sigma(n)$ az $1+p_i+\ldots+p_i^{\alpha_i}$ összegek szorzata $(1\le i\le t)$.

Ha az n szám megfelel a feladat feltételének, akkor $\sigma(n)=2n+1$, azaz páratlan. Ha p páratlan prím, akkor az $1+p+\ldots+p^{\alpha}$ összeg pontosan akkor lesz páratlan, ha páratlan sok tagja van, azaz ha α páros. Ezért $n=2^k m^2$, ahol $k>0$ (hiszen n a feladat feltétele miatt páros), m pedig páratlan. (1 pont)$^{\alpha}$

A mértani sorozat összegképlete szerint $1+2+\ldots+2^k=2^{k+1}-1$. A fentiek alapján tehát $\sigma(n)=(2^{k+1}-1)\sigma(m^2)$. (1 pont)$^{\beta}$

A $\sigma(n)=2n+1$ egyenletből $(2^{k+1}-1)\sigma(m^2)=2^{k+1}m^2+1$. Átrendezve $(2^{k+1}-1)(\sigma(m^2)-m^2)=m^2+1$. (2 pont)$^{\gamma}$

Ebből ellentmondásra fogunk jutni úgy, hogy megmutatjuk: a bal oldalnak van $4\ell-1$ alakú prímosztója, a jobb oldalnak pedig nincs. (1 pont)$^{\delta}$

A $k>0$ feltétel miatt $2^{k+1}-1$ egy $4\ell-1$ alakú (páratlan) szám. Ha minden prímosztója $4\ell+1$ alakú lenne, akkor ezek szorzata is $4\ell+1$ alakú lenne, ami nem igaz. Ezért $(2^{k+1}-1)$-nek van egy $p=4\ell-1$ prímosztója. (1 pont)$^{\varepsilon}$

Ekkor $p\mid m^2+1$, azaz $m^2\equiv -1\ (p)$. Ezt $(p-1)/2$-edik hatványra emelve $m^{p-1}\equiv(-1)^{(p-1)/2}\ (p)$. De $(p-1)/2=2\ell-1$ páratlan, ezért $(-1)^{(p-1)/2}=-1$. Másrészt p és m relatív prímek, tehát az Euler–Fermat-tétel szerint $m^{p-1}\equiv 1\ (p)$. Innen $1\equiv -1\ (p)$, ami ellentmond annak, hogy p páratlan. Ezzel beláttuk, hogy nem létezik olyan pozitív páros szám, amely megegyezne az önmagától és 1-től különböző osztói összegével. (1 pont)$^{\zeta}$