A 2012/2013. tanévi FIZIKA Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny második fordulójának feladatai és megoldásai

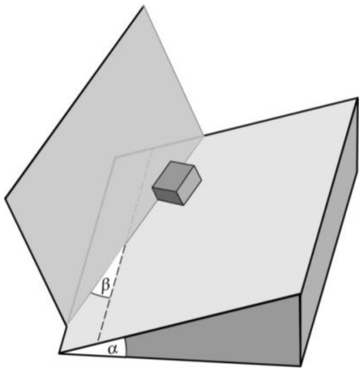
II. kategória

A dolgozatok elkészítéséhez minden segédeszköz használható. Megoldandó az első két feladat és a 3/A és 3/B sorszámú feladatok közül egy szabadon választott. Csak 3 feladat megoldására adható pont. A 3/A és 3/B feladat közül a több pontot elérő megoldást vesszük figyelembe.

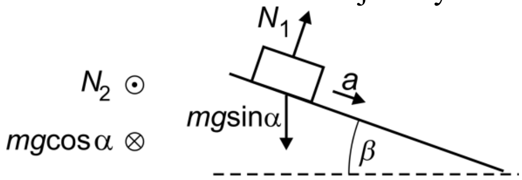
1. *Rögzített, α hajlásszögű lejtő síkjára merőlegesen merev síklemezt erősítünk. A lemez síkja β szöget zár be egy, a lejtő síkjában lévő vízszintes egyenessel, ahogy azt az ábra mutatja. Homogén tömegeloszlású téglatestet helyezünk el úgy, hogy annak szomszédos lapjai közül az egyik a lejtő síkjával, a másik a síklemezzel érintkezzék, majd a hasábot magára hagyjuk.*

a) Mekkora a hasáb gyorsulása, ha a súrlódás mindenhol elhanyagolható?

b) Legalább mekkora legyen a tapadási súrlódási együttható, ha azt szeretnénk, hogy a hasáb ne csússzon meg? Feltételezzük, hogy a hasáb egyenletesen érintkezik a felületekkel, illetve, hogy a síklemez és a lejtő anyagi minősége azonos.



Megoldás. *a)* Nézzünk merőlegesen a lejtő síkjára (lásd a fenti ábrát)! A lejtő alsó éle az ábrán is vízszintes, és a merev síklemezt élben látjuk. A merev síklemez által kifejtett nyomóerőt (N_1) látjuk nyílként az ábrán.



A másik nyíl a nehézségi erő lejtő irányú komponense, $mg\sin\alpha$. A lejtő által kifejtett nyomóerő (N_2) az ábra síkjára merőlegesen felfelé, míg a nehézségi erő másik komponense, $mg\cos\alpha$, az ábra síkjára merőlegesen lefelé mutat.

a) Az erők egyensúlyából a következőknek kell teljesülnie:

az α hajlásszögű lejtő síkjára merőleges irányban:

$$mg\cos\alpha - N_2 = 0\,, \qquad (1)$$

a β hajlásszögű síklemezre merőleges irányra:

$$mg\sin\alpha\cos\beta - N_1 = 0\,. \qquad (2)$$

A gyorsulás irányában:

$$mg\sin\alpha\sin\beta = ma\,. \qquad (3)$$

A (3) egyenletből a gyorsulásra

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{g}\sin\boldsymbol{\alpha}\sin\boldsymbol{\beta} \tag{4}$$

adódik.

b) Az erők egyensúlya:
Az *α* hajlásszögű lejtő síkjára merőleges irányban:

$$mg\cos\alpha - N_2 = 0\,. \tag{5}$$

A *β* hajlásszögű síklemezre merőleges irányra:

$$mg\sin\alpha\cos\beta - N_1 = 0\,. \tag{6}$$

A *β* hajlásszögű síklemez síkjának irányában:

$$mg\sin\alpha\sin\beta - S = 0\,. \tag{7}$$

A tapadás/csúszás határán:

$$S = \mu(N_1 + N_2)\,. \tag{8}$$

Az (5) – (8) egyenletekből a súrlódási együtthatóra

$$\boldsymbol{\mu} = \frac{\sin\boldsymbol{\alpha}\sin\boldsymbol{\beta}}{\sin\boldsymbol{\alpha}\cos\boldsymbol{\beta} + \cos\boldsymbol{\alpha}} \tag{9}$$

adódik.

Alternatív megoldás *a)*-ra: Egyszerűn megmutatható, hogy a pálya hajlásszöge $\sin\gamma = \sin\alpha\sin\beta$, így a gyorsulás a „szokásos” $a = g\cdot\sin\alpha\sin\beta$-nek adódik.

2, *Függőlegesen álló, henger alakú tartály felső részét nehezen mozgó dugattyú zárja le. A dugattyú mozgásakor fellépő csúszási súrlódási erő állandó, nagysága megegyezik a tapadási súrlódási erő maximumával. A dugattyú felülete* 30 cm^2, *tömege* 3 kg. *A külső légnyomás* 10^5 Pa. *A hengerben levegő van, kezdetben a bezárt levegő térfogata* 1200 cm^3.

a) Mekkora a maximálisan fellépő súrlódási erő, ha a dugattyú a fent leírt helyzetben mindaddig mozdulatlan marad, ameddig a bezárt levegő hőmérséklete 300 *és* 360 K *közé esik?*

A henger és a dugattyú tökéletesen hőszigetelő anyagból készült. A henger belső falán különleges bevonat található, ami a súrlódási hőt igen gyorsan átadja a vele érintkező gáznak. Így jó közelítéssel teljesül, hogy a dugattyú lenyomásakor a súrlódási hőt egyedül a környező levegő veszi fel, míg a dugattyú felfelé történő mozgásakor a súrlódás kizárólag a tartályban lévő levegőt melegíti.

b) Tegyük fel, hogy a bezárt levegő hőmérséklete éppen 300 K. *Ekkor óvatosan egy nagy súlyt teszünk a dugattyú tetejére, amit fokozatosan elengedünk. Így a bezárt levegő térfogata a felére csökken. Mekkora a súly tömege?*

A hengerben található egy 5 W *teljesítményű elektromos fűtőtest is, amit azt követően kapcsolunk be, hogy a dugattyúra helyezett súlyt elengedtük.*

c) A fűtőtest bekapcsolása után mennyi idő múlva mozdul meg a dugattyú?

A fűtőtestet a dugattyú megmozdulása után is bekapcsolva hagyjuk.

d) A dugattyú elindulása után mennyi idővel kerül vissza a dugattyú az eredeti helyzetébe?

Megoldás. *a)* A tapadási súrlódási erő maximuma legyen *S*. Ha a hőmérséklet eléri a maximális 360 K értéket, akkor ez az erő lefelé mutat, a tapadási súrlódás a bezárt gáz megnövekedett nyomását ellensúlyozza. Ha a hőmérséklet a minimális 300 K-re csökken, akkor a súrlódási erő felfelé mutat, lényegében segíti a gázt a dugattyú súlyának megtartásában. A két határesetben a gáz nyomása ±*S/A* értékkel változik ahhoz képest, amikor egyáltalán nem lép fel súrlódási erő. A dugattyú súlyából is származik egy

mg/A = 1 N/cm^2 = 0,1 · 10^5 Pa nagyságú nyomás (m = 3 kg a dugattyú tömege, A = 30 cm^2 pedig a dugattyú felületének nagysága). Ehhez a nyomáshoz hozzáadódik a külső levegő p_0 = 10^5 Pa nyomása, vagyis ha nem lép fel súrlódás, akkor a gáz nyomása p_0 + mg/A = 1,1 · 10^5 Pa. Alkalmazzuk a bezárt gázra Gay-Lussac második törvényét a két határesetben:

$$\frac{1{,}1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}+\dfrac{S}{A}}{360\ \mathrm{K}}=\frac{1{,}1\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}-\dfrac{S}{A}}{360\ \mathrm{K}}$$

Az egyenlet megoldása S/A = 0,1 · 10^5 Pa = 1 N/cm^2, amiből S = **30 N**.

b) Ha a levegő hőmérséklete 300 K, akkor a maximális értékű, felfelé mutató tapadási súrlódási erő éppen annyira csökkenti a bezárt gáz nyomását, hogy az megegyezik a külső levegő p_0 = 10^5 Pa nyomásával. Ha a levegőt adiabatikusan térfogatának felére nyomjuk össze, akkor a nyomása 2^κ-szorosára nő, ahol κ = 7/5 = 1,4, mert a levegő kétatomos gáz. Vagyis a nyomás a súly elengedésekor $2^\kappa \cdot p_0$ = 2,64 · 10^5 Pa, ami azt jelenti, hogy a dugattyúra helyezett súly Δp_s = 1,64 · 10^5 Pa nyomást eredményez, ami Mg/A alakban fejezhető ki. A dugattyúra helyezett súly tömege $M = \Delta p_s A/g$ = 49,2 kg ≈ **49 kg** tömegű (g = 10 m/s^2-tel számolva).

Megjegyzés: Ha mindvégig g = 9,81 m/s^2-tel számolunk, akkor a tapadási súrlódási erő maximumára S = 29,95 N ≈ **30 N** értéket kapunk, míg a dugattyúra helyezett súly tömege M = 49,98 kg ≈ **50 kg** értékűnek adódik.

c) Akkor mozdul meg a dugattyú, ha a maximális súrlódási erő irányt vált, vagyis a bezárt levegő nyomása $\Delta p = 2S/A$ = 0,2 · 10^2 Pa értékkel megnő. A folyamat állandó térfogaton zajlik, a közölt hőt így számíthatjuk ki:

$$Q=C_\mathrm{v}n\Delta T=\frac{5}{2}Rn\Delta T=\frac{5}{2}\Delta pV=\frac{5}{2}\cdot 0,2\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 600\cdot 10^{-6}\,\mathrm{m}^3=30\ \mathrm{J},$$

ahol a V térfogat az eredeti 1200 cm^3-es térfogat fele: V = 600 cm^3 = 600 · 10^{-6} m^3. Ekkora hőközléshez a P = 5 W teljesítményű fűtőszálat $t_1 = Q/P$ = **6 s** ideig kell működtetni.

d) A dugattyú mozgása közben a nyomás lesz állandó (p = 2,84·10^5 Pa). Azt kell észrevenni, hogy a fűtőszál hője okozza a belső energia növekedését és a tágulási munkát. A súrlódás miatt megnő a tágulási munka (olyan, mintha a dugattyú még 3 kg tömeget emelne fel), azonban a súrlódás miatt keletkezett hő visszakerül a rendszerbe, vagyis a súrlódási hő is melegíti a rendszert. Tehát a teljes hőközlésre a következő egyenletet írhatjuk fel:

$$Q+Q_{\text{súrl.}}=C_\mathrm{p}n\Delta T=\frac{7}{2}Rn\Delta T=\frac{7}{2}p\Delta V=\frac{7}{2}\cdot 2,84\cdot 10^5\,\mathrm{Pa}\cdot 6\cdot 10^{-4}\mathrm{m}^3=596,4\ \mathrm{J},$$

ahol a V térfogat az eredeti 1200 cm^3-es térfogat másik fele: V = 600 cm^3 = 6·10^{-4} m^3. A súrlódási hőt (a súrlódási munka ellentettjét) az S súrlódási erő és az $y = V/A$ = 0,2 m dugattyú-elmozdulás szorzataként számíthatjuk ki: $Q_{\text{súrl.}} = S\cdot y$ = 6 J. Tehát a fűtőszál által keltett hő nagysága: Q = 596,4 J – 6 J = 590,4 J. Ezért a fűtőszálat még $t_2 = Q/P$ = 118,1 s ≈ **118 s** ideig kell működtetnünk.

Megjegyzés: Ebben a speciális esetben a súrlódási munka által keltett hő teljes egészében a gázt melegíti. Ha tehát felírjuk a termodinamika első főtételét, akkor a hőközlésben is megkülönböztethetjük a súrlódási hőt, és a munkavégzésben is:

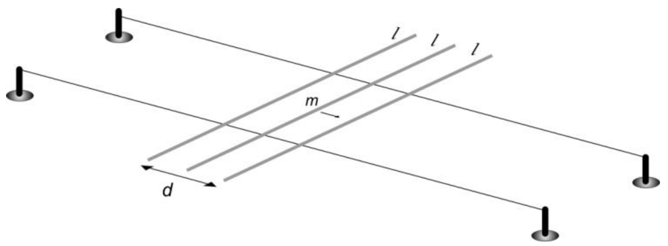
$$\Delta E=Q+W=Q_{\text{fűtőszál}}+Q_{\text{súrl.}}-(m+M)g\cdot y-p_0\Delta \mathrm{V}-S\cdot y.$$

Vegyük észre, hogy ebben az egyenletben $Q_{súrl.} - S \cdot y = 0$. Ez azt jelenti, hogy ha a mozgó dugattyú miatt keletkező súrlódási hő teljes egészében a gázt melegíti, akkor a súrlódás nincs hatással a belső energia megváltozására! Ebben az a furcsaság, hogy a fűtőszál működése nélkül nem mozdulna meg a dugattyú, nem lépne fel súrlódás, mégis a fűtőszál hője csak a gáz belső energiáját növeli, a dugattyút és a rajta lévő súlyt emeli, és a külső levegő nyomása ellenében végez munkát, azonban a fűtőszál hőjében nincs benne a súrlódási munka, mert azt hő formájában visszakapja a gáz.

3/A *Vízszintes síkban kifeszített, két párhuzamos szigetelő fonálra három azonos vonalmenti töltéssel ellátott szívószálat helyezünk úgy, hogy egymással párhuzamosak, a fonalakra merőlegesek legyenek. A két szélső, rögzített szívószál egymástól való távolsága d, amely lényegesen kisebb, mint a szívószál hossza. A középső szívószálat a fonalakkal párhuzamos irányban kissé kitérítjük x távolságra, majd magára hagyjuk.*

a) Mutassuk meg, hogy a középső szívószál mozgása közelíthető harmonikus rezgőmozgással!
b) Mekkora a szívószálak vonalmenti töltéssűrűsége, ha T periódusidejű mozgás jön létre?
c) Mekkora a szívószál maximális sebessége?

A súrlódást és a közegellenállást tekintsük zérusnak!
Adatok: A szívószál tömege m = 0,5 g, *hossza* l = 42 cm, T = 0,5 s, d = 5 cm, x = 0,5 cm.



Megoldás. Adatok: A szívószál tömege m = 0,5 g, hossza l = 42 cm, T = 0,5 s, d = 5 cm, x = 0,5 cm.

a) A ρ vonalmenti töltéssűrűségű szigetelő l hosszú szakasza, mint tengely körül helyezzünk el egy r sugarú, l magasságú hengert és annak térfogatára alkalmazzuk a Gauss-törvényt! Csak a henger palástját döfik indukcióvonalak. A palást minden pontjában ugyanakkora az elektromos térerősség és merőleges a felületre.

$$\Psi_{zárt} = \frac{1}{\varepsilon_0} \cdot \sum Q;$$

$$E \cdot l \cdot 2r\pi = 4\pi k \cdot \rho \cdot l;$$

$$E(r) = \frac{2k\rho}{r}.$$

Az egymástól d távolságra lévő, rögzített szívószálak között középen lévő harmadik szívószálat mozgassuk el x távolsággal. Ekkor a ráható eredő erő:

$$\sum F = 2k\rho \cdot \left[\frac{1}{\frac{d}{2}+x} - \frac{1}{\frac{d}{2}-x} \right] \cdot \rho l = -2k\rho^2 l \cdot \frac{2x}{\left(\frac{d}{2}\right)^2 - x^2}$$

A $\left(\frac{d}{2}\right)^2$ tag mellett x^2 elhanyagolható. $\qquad \sum F \approx -\frac{16k\rho^2 l}{d^2} \cdot x.$

A középső szívószálra ható eredő erő nagysága arányos az egyensúlyi helyzettől való x kitéréssel, és iránya ellentétes vele. Ezzel beláttuk, hogy a középső szívószálra harmonikus erő hat, ezért harmonikus rezgőmozgást fog végezni.

b) A fenti összefüggésből $\sum F = -D \cdot x$ meghatározható a mozgást jellemző látszólagos rugóállandó (direkciós erő): $D^* = \dfrac{16k\rho^2 l}{d^2}$.

Használjuk fel a harmonikus rezgőmozgás periódusidejére vonatkozó összefüggést:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{D}}.$$

A D rugóállandót fejezzük ki és tegyük egyenlővé a D^* látszólagos rugóállandóval:

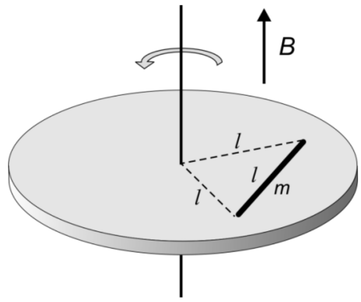
$$D = \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m; \qquad D^* = \frac{16k\rho^2 l}{d^2};$$

$$D = D^*;$$

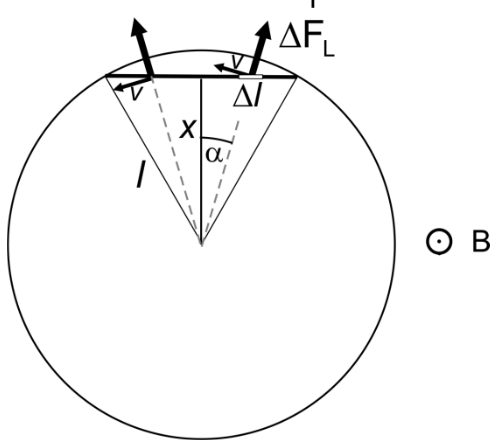
$$\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot m = \frac{16k\rho^2 l}{d^2};$$

$$\rho = \frac{\pi d}{2T} \cdot \sqrt{\frac{m}{kl}} \approx \mathbf{5{,}7 \cdot 10^{-8}\ \frac{C}{m}}.$$

3/B *Vízszintes helyzetű, szigetelő anyagból készült korong függőleges helyzetű szimmetriatengelye körül elfordulhat. A korongra m tömegű, l hosszúságú, egyenletes tömegeloszlású és egyenletes τ vonalmenti töltéssűrűségű pálcát helyezünk úgy, hogy a pálca végpontjai és a korong középpontja szabályos háromszöget alkossanak. A pálca a lemezre egyenletesen fekszik fel, közöttük a tapadási súrlódási tényező értéke μ. A rendszer B indukciójú, függőlegesen felfelé mutató homogén mágneses mezőben nyugszik. A korongot az ábra szerint igen kis szöggyorsulással forgatni kezdjük. Mekkora lesz a korong szögsebessége a pálca megcsúszásának pillanatában, ha a pálca töltése pozitív?*
(A pálca és a korong közötti elektrosztatikus kölcsönhatás elhanyagolható.)



Megoldás: **V**izsgáljuk meg az erőket! A felülnézeti ábra mutatja a rúd egy-egy kicsiny darabjának sebességét, és a rá ható Lorentz-erőt. Látható továbbá, hogy a Lorenz-erők eredője sugárirányban kifelé irányul.



A kicsiny szakaszra ható Lorentz-erő:

$$\Delta F_\mathrm{L} = \tau \Delta l\, v\, B = \tau \Delta l \omega \frac{x}{\cos\alpha} B \,. \qquad (1)$$

Ezek eredője a pálca középpontjában koncentrálható, kifelé mutat, és nagysága:

$$F_\mathrm{L} = \sum \Delta F_\mathrm{L} = \sum \tau \Delta l \omega \frac{x}{\cos\alpha} B\cos\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}\tau l^2 B\omega \,, \quad (2)$$

ahol felhasználtuk, hogy $x = \dfrac{\sqrt{3}}{2} l$.

Noha nem tananyag a gyorsuló koordinátarendszerekben történő mozgásleírás, mégis sok tanuló (akár pusztán intuitív módon) alkalmazza. Az egyszerűség kedvéért először mi is így teszünk. A centrifugális erő szintén a pálca közepében koncentrálódik, kifelé mutat:

$$F_C = \frac{\sqrt{3}}{2} ml\omega^2 . \qquad (3)$$

A tapadási erő úgyszintén a pálca középpontjában vehető fel sugárirányban befelé.

Ebben a szituációban, amit vizsgálunk F_C kifelé, F_L kifelé, következésképp S befelé mutat, tehát a megcsúszás feltétele:

$$F_C + F_L - S = 0 \qquad (4)$$

úgy, hogy tapadási erő felveszi az $S = \mu mg$ értéket.

Természetesen nem feltétlenül szükséges a forgó koordinátarendszer ismerete. Álló koordinátarendszerben a Lorentz-erő ugyanígy összegezhető, és a súrlódási erő is ugyanígy adható meg, azonban ezek eredőjének a pálca tömegének és a tömegközépponti gyorsulásának (centripetális gyorsulásnak) a szorzatával kell megegyeznie:

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\tau l^2 B\omega - \mu mg = -\frac{\sqrt{3}}{2} ml\omega^2 .$$

A feltétel tehát mindkét megfontolás szerint ugyanaz:

$$\frac{\sqrt{3}}{2} ml\omega^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}\tau l^2 B\omega - \mu mg = 0 , \qquad (5)$$

azaz

$$\omega^2 + \frac{lB\tau}{m}\omega - \frac{2\mu g}{\sqrt{3}l} = 0 , \qquad (6)$$

amelynek megoldása

$$\omega = \frac{1}{2}\left(-\frac{lB\tau}{m} \pm \sqrt{\frac{l^2 B^2 \tau^2}{m^2} + \frac{8\mu g}{\sqrt{3}l}} \right). \qquad (7)$$

A fizikailag értelmes megoldás (pozitív szögsebesség) pedig:

$$\boldsymbol{\omega = \frac{1}{2}\left(-\frac{lB\tau}{m} + \sqrt{\frac{l^2 B^2 \tau^2}{m^2} + \frac{8\mu g}{\sqrt{3}\,l}} \right).} \qquad (8)$$