OKTATÁSI HIVATAL

A 2020/2021. tanévi
Országos Középiskolai Tanulmányi Verseny
első forduló

FIZIKA II. KATEGÓRIA

JAVÍTÁSI-ÉRTÉKELÉSI ÚTMUTATÓ

A versenyzők figyelmét felhívjuk arra, hogy áttekinthetően és olvashatóan dolgozzanak. Amennyiben áttekinthetetlen és olvashatatlan részek vannak a dolgozatban, azok az értékelés szempontjából figyelmen kívül maradnak.

1. feladat

Vízszintes talaj felett h magasságban rögzített, vízszintes tengelyhez az egyik végével egy $L = 0{,}8\,\mathrm{m}$ hosszúságú, vékony, homogén, $m = 0{,}5\,\mathrm{kg}$ tömegű merev rudat erősítettünk úgy, hogy a tömegközéppontja a tengely fölött helyezkedjen el. A rúd ekörül a tengely körül szabadon foroghat. A rúd a kezdeti függőleges, nyugalmi labilis egyensúlyi helyzetéből kibillen, és amikor a rúd újra függőleges lesz, leválik tengelyről. Ezután szabadon mozogva fél fordulat megtétele után függőleges helyzetben ér talajt.

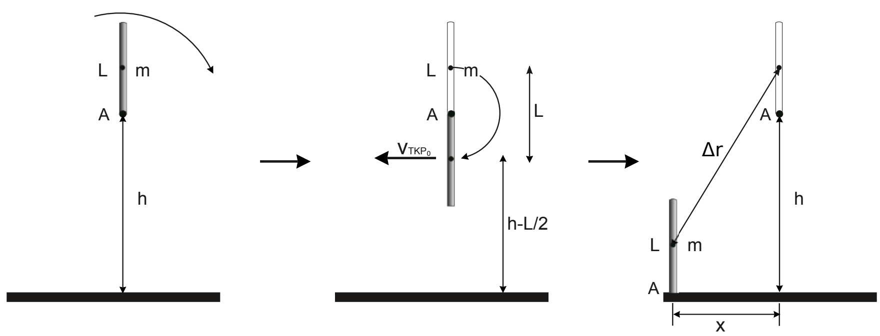
a) Mekkora a tengely talaj feletti h magassága?

b) A kezdeti helyzethet képest mekkora távolságra van a rúd középpontja, amikor eléri a talajt?

c) Mekkora volt a tengely által a rúdra kifejtett teljes erő maximális értéke?

Megoldás

a) A kezdő-, közbenső és véghelyzetet az ábra mutatja:



A munkatétel szerint a testre ható összes erők munkája egyenlő a mozgási energiájának megváltozásával. Meghatározzuk a tengellyel való érintkezés utolsó pillanatában a szögsebességet, valamint a rúd tömegközéppontjának a sebességét. Mivel a nyugvó tengely nem végez munkát a rúdon, csak a nehézségi erő munkájával kell számolnunk.

A tömegközéppont L távolsággal került mélyebbre. A rúd mozgási energiáját a legegyszerűbb a végponton áthaladó tengelyre vonatkozó forgási energiájával felírni:

$$\sum W = mgL = \frac{1}{2}\Theta_A\omega^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}mL^2\omega^2,$$

ahonnan a szögsebesség

$$gL = \frac{1}{6}L^2\omega^2 \quad \to \quad \omega = \sqrt{\frac{6g}{L}} = 8{,}6\,\frac{1}{\mathrm{s}}.$$

Ezzel a tömegközéppont sebessége:

$$v_{\mathrm{Tkp}_0} = \frac{L}{2}\omega = \sqrt{\frac{3gL}{2}} = 3{,}4\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}}.$$

Ekkora a rúd tömegközéppontjának vízszintes irányú a tengelyről történő leválás pillanatában. A tengely elhagyása utáni *fél fordulat* megtételének ideje a $\varphi = \omega t$ összefüggésből:

$$t = \frac{\varphi}{\omega} = \frac{\pi}{\omega} = 0{,}37\,\mathrm{s}.$$

Ennyi idő alatt a tömegközéppont $h - L$ magasságot szabadon esik:

$$h - L = \frac{1}{2}gt^2 \quad \to \quad h = L + \frac{1}{2}gt^2 = 1{,}46\,\mathrm{m}.$$

b) A válaszhoz meg kell határozni, hogy ennyi idő alatt mekkora a rúd középpontjának vízszintes elmozdulása. Mivel vízszintes irányban a rúdra nem hat erő, egyenletes mozgásvetületről beszélhetünk. Az x irányú elmozdulás:

$$x = v_{\mathrm{Tkp}_0}\cdot t = 1{,}26\,\mathrm{m},$$

és a keresett elmozdulás:

$$\Delta r = \sqrt{h^2 + x^2} = 1{,}92\,\mathrm{m}.$$

c) A tengely által a rúdra kifejtett maximális erő a tengelyről való leválás előtti pillanatban lép fel, és függőlegesen felfelé irányul. Ezt a következőképpen bizonyíthatjuk be.

Jelölje α azt a szöget, amit a rúd az y tengely negatív irányával zár be. Ekkor a rúd szögsebessége az energiamegmaradásból számítható ki:

$$\frac{1}{2}\Theta_A\omega^2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}mL^2\right)\omega^2 = mg\left(\frac{L}{2} + \frac{L}{2}\cos\alpha\right) \quad \to \quad \omega = \sqrt{\frac{3g(1+\cos\alpha)}{L}}.$$

A nehézségi erő rúdirányú összetevője $mg\cos\alpha$, míg a tengely által a rúdra kifejtett erő rúdirányú összetevője legyen F_r. A rúd középpontjára vonatkozó centripetális erőt (a rúd tömegének és a tömegközéppontja sugárirányú gyorsulásának a szorzatát) így írhatjuk fel:

$$F_\mathrm{r} - mg\cos\alpha = m\frac{L}{2}\omega^2 = \frac{3mg(1+\cos\alpha)}{2},$$

amiből

$$F_\mathrm{r} = \frac{mg(3 + 5\cos\alpha)}{2}.$$

A rúd tömegközéppontjának $a_é$ érintőirányú gyorsulását a forgómozgás alapegyenletének segítségével kaphatjuk meg:

$$M = mg\frac{L}{2}\sin\alpha = \Theta_A\beta = \left(\frac{1}{3}mL^2\right)\left(\frac{a_é}{L/2}\right) \quad \to \quad a_é = \frac{3}{4}g\sin\alpha.$$

A rúd tömegközéppontjának érintőleges gyorsulását a nehézségi erőnek és a tengely által kifejtett kényszererőnek az érintőirányú összetevői adják:

$$ma_é = \frac{3}{4}mg\sin\alpha = mg\sin\alpha - F_é,$$

amiből

$$F_é = \frac{mg\sin\alpha}{4}.$$

A rúd végére ható teljes erő:

$$\begin{aligned} F &= \sqrt{F_r^2 + F_é^2} = \sqrt{\left[\frac{mg(3+5\cos\alpha)}{2}\right]^2 + \left[\frac{mg\sin\alpha}{4}\right]^2} = \\ &= \frac{mg}{4}\sqrt{37 + 120\cos\alpha + 99\cos^2\alpha}. \end{aligned}$$

Jól látható, hogy az erő annál nagyobb, minél nagyobb $\cos\alpha$ értéke. Ez éppen a rúd függőleges helyzetében valósul meg (ahol $\alpha = 0$). Ekkor a gyök alatti szám 256, aminek a gyöke 16, vagyis a tengely által a rúdra kifejtett legnagyobb erő:

$$F = 4mg = 19{,}62\,\mathrm{N}.$$

Ha valaki ezt nem bizonyítja, csak megsejti, hogy a keresett maximális erő a rúd függőleges helyzeténél lép fel, akkor a számítást a következőképpen folytathatja:

A tengely által a rúdra kifejtett maximális erő a tengelyről való leválás előtti pillanatban lép fel, és függőlegesen felfelé irányul. Ez az erő, valamint a nehézségi erő vektorösszege szabja meg a tömegközéppont gyorsulásának nagyságát, azaz:

$$F_{\mathrm{tengely}} - F_{\mathrm{neh}} = ma_{\mathrm{Tkp}}.$$

A rúd tömegközéppontja $L/2$ sugarú körön mozog. Így innen a fenti v_{Tkp_0}-lal:

$$\begin{aligned} F_{\mathrm{tengely}} &= F_{\mathrm{neh}} + ma_{\mathrm{Tkp}} = mg + m\frac{v_{\mathrm{Tkp}_0}^2}{L/2} = m\left(g + \frac{2v_{\mathrm{Tkp}_0}^2}{L}\right) = \\ &= 4mg = 19{,}62\,\mathrm{N} \end{aligned}$$

2. feladat

Két különböző anyagú léggömböt reggel $T_1 = 7\,^\circ\mathrm{C}$ hőmérsékletű, $p_1 = 100\,\mathrm{kPa}$ nyomású, $V_1 = 5\,\mathrm{liter}$ levegővel töltünk meg. Az egyiket (A-jelű) – amely igen könnyen tágul, – kitesszük a diófa alá, és így az délre $T_{\mathrm{vég,A}} = 37\,^\circ\mathrm{C}$-ra melegszik. A másikat (B-jelű) a tűző napra helyezzük. A B-jelű léggömb sötét színű fala erősebb, speciálisan viselkedő gumiból készült. Melegedése közben a benne lévő levegő nyomását és a szabályos gömb alakú lufi átmérőjét mérjük, eredményeinket a mellékelt táblázatban közöljük.

p (10^5 Pa)	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10
d (cm)	21,22	21,36	21,48	21,64	21,76	21,90

a) Mekkora hőt vett fel az A-jelű léggömbben lévő levegő, miközben 7 °C-ról 37 °C-ra melegszik?

b) Becsüljük meg, hogy mekkora a B-jelű léggömbbe zárt levegő által felvett hő a kiindulási állapottól a legnagyobb nyomás eléréséig!

Megoldás

a) Az A-jelű léggömbben lényegében izobár folyamat zajlik (hiszen az A-jelű lufi fala könnyen tágul és azt is feltételezhetjük, hogy a külső légnyomás állandó). Az első főtétel szerint számolható a felvett hő:

$$Q_\mathrm{A} = \Delta E_\mathrm{A} + W_{\text{gáz,A}},$$

$$\Delta E_\mathrm{A} = \frac{f}{2} nR\Delta T_\mathrm{A} = \frac{f}{2}\frac{p_1 V_1}{T_1}\Delta T_\mathrm{A} = 134\,\mathrm{J}.$$

$$W_{\text{gáz,A}} = p_1 \Delta V_\mathrm{A} = p_1\left(\frac{T_{\text{vég,A}} V_1}{T_1} - V_1\right) = 53{,}6\,\mathrm{J}.$$

$$Q_\mathrm{A} \approx 188\,\mathrm{J}.$$

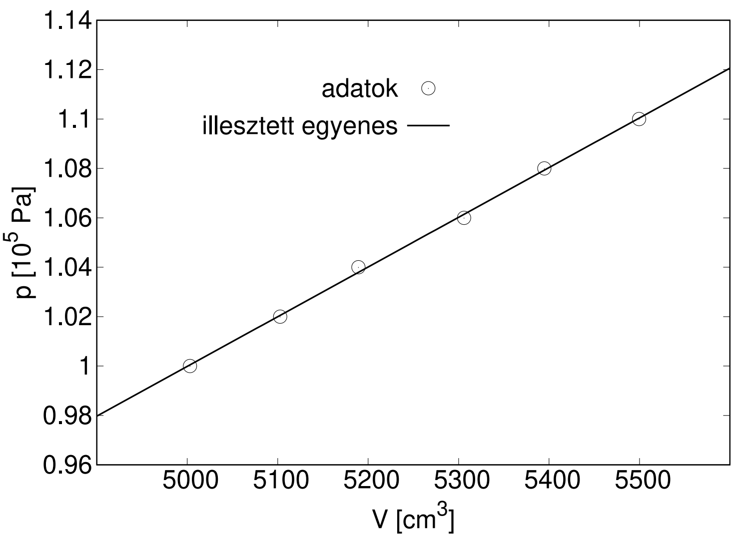
Megjegyzés: A hőmennyiség közvetlenül a

$$Q_\mathrm{A} = \frac{f+2}{2} nR\Delta T_\mathrm{A}$$

összefüggésből is számítható.

b) A táblázatban szereplő átmérőadatok alapján meghatározhatjuk az egyes nyomásadatokhoz tartozó térfogatokat:

p (10^5 Pa)	1,00	1,02	1,04	1,06	1,08	1,10
d (cm)	21,22	21,36	21,48	21,64	21,76	21,90
V(cm^3)	5003	5103	5189	5306	5395	5500



Megállapítható közvetlenül a táblázati adatok vagy a megrajzolható grafikon alapján, hogy ebben a speciális léggömbben (a vizsgált tartományban) igen jó közelítéssel lineáris kapcsolat állapítható meg a térfogat és a nyomás között (sőt még azt is észrevehetjük, hogy a nyomás egyenesen arányos a térfogattal, vagyis az egyenes a $p-V$ sík origóján megy át, hiszen 10%-os térfogatnövekedéshez 10%-os nyomásnövekedés tartozik). Ezért számítható a munka a kezdeti és végállapothoz tartozó nyomás számtani közepével, mint átlagos nyomással.

Az egyesített gáztörvény alapján meghatározhatjuk, hogy a közvetlen napsugárzás hatására a sötét lufiban a hőmérséklet

$$T_{\text{vég,B}} = \frac{p_{\text{vég,B}} V_{\text{vég,B}}}{p_1 V_1} T_1 = 339\,\mathrm{K} \approx 66\,^\circ\mathrm{C}$$

lett. A felvett hőt most is az első főtétel alapján számolva:

$$Q_{\mathrm{B}} = \Delta E_{\mathrm{B}} + W_{\text{gáz,B}},$$

$$\Delta E_{\mathrm{B}} = \frac{f}{2} nR\Delta T_{\mathrm{B}} = \frac{f}{2}\frac{p_1 V_1}{T_1}\Delta T_{\mathrm{B}} = 263\,\mathrm{J}.$$

$$W_{\text{gáz,B}} = \frac{p_1 + p_{\text{vég,B}}}{2}\Delta V_{\mathrm{B}} = 52{,}5\,\mathrm{J}.$$

$$Q_{\mathrm{B}} \approx 315\,\mathrm{J}.$$

Megjegyzés: Ismeretes, hogy ha a gáz nyomása egyenesen arányos a térfogattal, akkor az ilyen folyamat mólhője állandó, melynek értéke c_V és c_p számtani közepe:

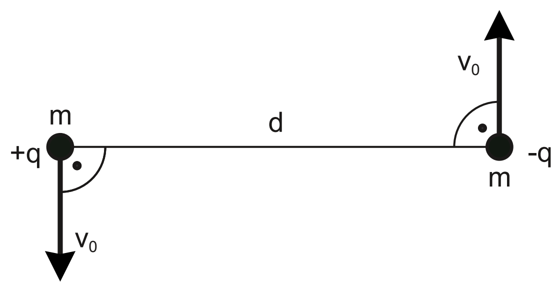
$$\frac{c_V + c_p}{2} = \frac{f+1}{2} R = 3R.$$

Ennek felhasználásával a közölt hő így is kiszámítható:

$$Q_B = 3Rn\Delta T_B = 3\frac{p_1 V_1}{T_1}\Delta T_B = 315\,\mathrm{J}.$$

3. feladat

Mindentől távol két, egyenlő m tömegű, pontszerűnek tekinthető $(+q)$, $(-q)$ töltésű testet indítunk egymástól d távolságra, v_0 sebességgel az ábrának megfelelő módon.



a) Mekkora a q töltés nagysága, ha a testek mozgásuk során mindig d távolságra vannak egymástól?

b) Mekkora a töltések nagysága, ha mozgásuk során ellipszispályákon mozognak és a legnagyobb távolságuk $3d$?

A gravitációs kölcsönhatástól és a sugárzási veszteségektől eltekinthetünk.

Megoldás

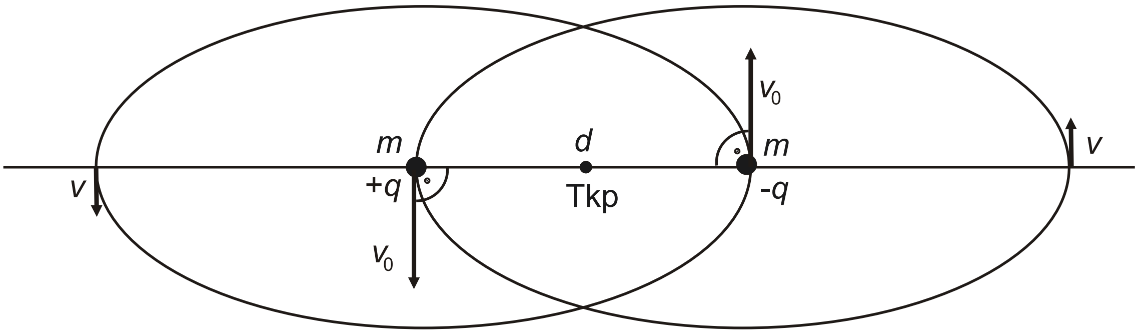
a) A megadott feltétel akkor teljesül, ha a töltések az azokat összekötő szakasz felezőpontjában lévő tömegközéppont körül egyenletes körmozgást végeznek. A mozgás dinamikai feltétele:

$$\frac{kq^2}{d^2} = \frac{mv_0^2}{r}, \qquad r = \frac{d}{2},$$

amelyekből

$$q = v_0\sqrt{\frac{2md}{k}}.$$

b) A töltések a tömegközéppontra középpontosan szimmetrikusan mozognak az ellipszispályákon, mindkét ellipszispálya egyik fókuszpontjában a tömegközéppont van. Jelöljük v-vel a legtávolabbi pontban a töltések sebességét.



Az elektrosztatikus mező konzervatív, így a mozgási energiának és az elektrosztatikus kölcsönhatási energiának az összege állandó:

$$E_\mathrm{m} + E_\mathrm{p} = \text{állandó},$$

$$2\,\frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{kq^2}{d} = 2\,\frac{1}{2}mv^2 - \frac{kq^2}{3d}. \tag{1}$$

Mivel az erők centrálisak, így a legtávolabbi pontban a sebesség meghatározásához használhatjuk a tömegközéppontra vonatkozó impulzusmomentum (perdület) megmaradásának tételét (vagy Kepler II. törvényét):

$$2mv_0\frac{d}{2} = 2mv\frac{3d}{2},$$

amelyből

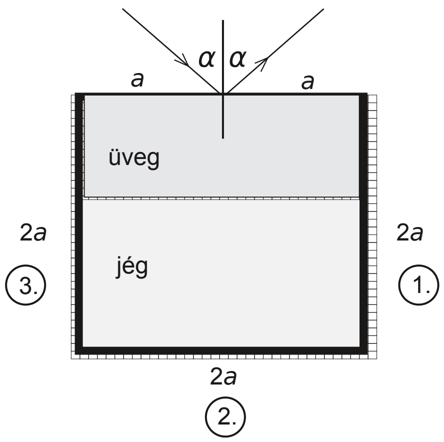
$$v = \frac{v_0}{3}. \tag{2}$$

Az (1) és (2) egyenletekből

$$q = 2v_0\sqrt{\frac{md}{3k}}.$$

4. feladat

Egy $2a$ oldalú kocka alsó része jégből, a felső üvegből készült. A két anyag sík határfelülete párhuzamos a kocka egyik lapjával, mely a metszeti ábrára merőleges. A kocka 1-es, 2-es és 3-as jelű oldalai befelé tükröző anyaggal vannak bevonva. A metszet síkjában, a négyzet felső élének felezőpontjához lézersugár érkezik, mely a jégben, az 1-es, 2-es és 3-as jelű oldalakról pontosan egyszer visszaverődve a belépési pontnál hagyja el a kockát, ugyanakkora $\alpha = 75°$-os törési szöggel, mint amekkora a beesési szög volt.



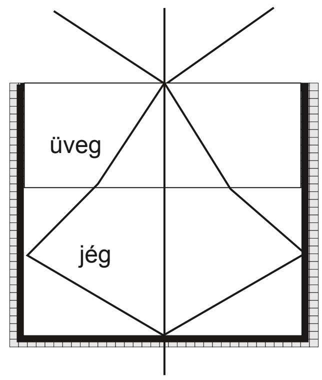
a) Hányszorosa a jég vastagsága az üvegének?

b) Milyen változást tapasztalnánk, ha megszüntetnénk a felületek tükröző épességét úgy, hogy az üveg, illetve a jég közvetlenül a levegővel érintkezzen? (A kocka alsó oldalának csúcsait használjuk arra, hogy a kockát a levegőben megtartsuk.)

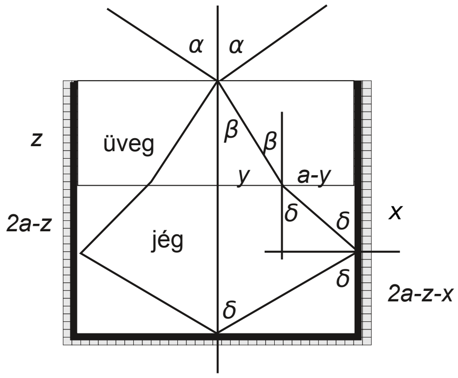
Az üveg törésmutatója 1,5, a jégé 1,3.

Megoldás

a) A visszaverődés és törés törvényei szerint a lézersugár folyamatosan a metszet síkjában halad. Másrészt a fényút megfordíthatósága miatt, az oldalfalakon azonos magasságban történik a visszaverődés, így az alsón csak középen történhet. Az ábra vázlatosan szemlélteti a fény útját.



Az üveg a levegőnél optikailag sűrűbb, ezért belépéskor a fénysugár a beesési merőlegeshez törik. A jég optikailag ritkább az üvegnél, ezért az üvegből jégbe történő átlépéskor a fénysugár a beesési merőlegestől elfelé törik. A feladat szimetriáit kihasználva a következő ábra mutatja a lényeges távolságokat és szögeket.



A törési törvény alapján

$$\frac{\sin\alpha}{\sin\beta} = n_{\text{ü}}, \quad \to \quad \frac{\sin 75°}{\sin\beta} = 1{,}5,$$

ebből $\beta = 40°$. Illetve

$$\frac{\sin\beta}{\sin\delta} = n_{\text{j,ü}}, \quad \to \quad \frac{\sin 40°}{\sin\delta} = \frac{1{,}3}{1{,}5},$$

vagyis $\delta = 48°$. Az ábrán szereplő távolságok és szögek közötti kapcsolatok:

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{y}{z}, \tag{1}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a-y}{x}, \tag{2}$$

$$\operatorname{tg}\delta = \frac{a}{2a-z-x}. \tag{3}$$

Az egyenletrendszerből z-re van szükségünk, hogy a kérdéses $(2a-z)/z$ hányadost kiszámítsuk. Az (1) egyenletből $y = z\operatorname{tg}\beta$, ezzel a (2) egyenlet a behelyettesítés után

$$x\operatorname{tg}\delta = a - z\operatorname{tg}\beta. \tag{4}$$

A (3) egyenlet alakítás után

$$2a\operatorname{tg}\delta - z\operatorname{tg}\delta - x\operatorname{tg}\delta = a \quad \to \quad 2a\operatorname{tg}\delta - a = z\operatorname{tg}\delta + x\operatorname{tg}\delta,$$

majd (4) behelyettesítése után

$$2a\operatorname{tg}\delta - a = z\operatorname{tg}\delta + a - z\operatorname{tg}\beta,$$

amiből

$$z = 2a\frac{\operatorname{tg}\delta - 1}{\operatorname{tg}\delta - \operatorname{tg}\beta} = 0{,}41\cdot 2a.$$

És ezzel

$$2a - z = 2a\left(1 - \frac{z}{2a}\right) = 0{,}59\cdot 2a,$$

vagyis

$$\frac{2a-z}{z} = 1{,}44.$$

A jég vastagsága tehát közel másfélszerese az üvegének.

b) A tükröző réteg megszüntetésével a jég-levegő határnál nem csak visszaverődhet, hanem ki is léphet a fény a levegőbe, ha beesési szöge kisebb a határszögnél. A κ_{hat} határszögre

$$\sin\kappa_{\text{hat}} = \frac{1}{1{,}3},$$

amiből

$$\kappa_{\text{hat}} \approx 50{,}3^\circ.$$

A visszaverődési helyeken a beesési szögek $\delta = 48^\circ$ és $90^\circ - \delta = 42^\circ$, melyek mindegyike kisebb a határszögnél, ezért a fény egy része a három visszaverődési pontnál kilép, vagyis a kocka tetején kilépő lézersugár erőssége a tükröző esetbeli kilépőhöz képest szemmel láthatóan csökken.

Megjegyzés: Az alaplapon a beesési szög nagyon közel van a határszöghöz, ezért itt csak kevés fény lép ki, a veszteségek főként az oldallapokon történnek.

Értékelési útmutató

1. feladat

a)	Az elváláskori szögsebesség és tömegközéppont sebességének a meghatározása:	4 pont
	A leesésig tartó mozgás idejének meghatározása:	2 pont
	A keresett h magasság helyes meghatározása:	3 pont
b)	A tömegközéppont elmozdulásának meghatározása:	2 pont
c)	Annak bizonyítása, hogy a rúdra ható erő maximuma a függőleges helyzetben van:	6 pont
	A maximális rúderő meghatározása:	3 pont
	Összesen:	**20 pont**

2. feladat

a)	A folyamat izobár jellegének felismerése:	1 pont
	Az első főtétel általános felírása:	1 pont
	A belső energia változásának felírása + az állapotegyenletből az Nk vagy nR szorzat kifejezése a megadott kiindulási adatokból + a belső energia változásának helyes kiszámítása:	3×1 pont
	A gáz munkájának felírása az izobár folyamatra + a végállapot térfogatának kifejezése a gáztörvényből + a gáz munkájának helyes kiszámítása:	3×1 pont
	A keresett hő kiszámítása:	1 pont
b)	A végállapot térfogatának meghatározása az átmérő ismeretében + hőmérsékletének kiszámítása az egyesített gáztörvény alapján:	$1 + 2$ pont
	Annak felismerése (a táblázati adatok elemzése, vagy grafikon rajzolása alapján), hogy a nyomás a térfogat lineáris függvénye (ebben a tartományban), vagy hogy a nyomás változása olyan kicsi, hogy becslés szintjén akár állandónak is tekinthetjük a munka meghatározásánál:	3 pont
	A belső energia megváltozásának felírása + kiszámítása:	$1 + 1$ pont
	A munka helyes felírása + kiszámítása:	$1 + 1$ pont
	A keresett hő kiszámítása az első főtétel alapján:	1 pont
	Összesen:	**20 pont**

3. feladat

a)	A feltételnek megfelelő mozgás helyes megadása:	2 pont
	A dinamika alapegyenletének helyes felírása:	2 pont
	A töltések nagyságának helyes meghatározása:	2 pont
b)	A töltések mozgásának helyes megadása:	4 pont
	Az energiamegmaradás tételének helyes felírása:	3 pont
	Az impulzusmomentum-megmaradás tételének helyes felírása (vagy Kepler II. törvényének alkalmazása):	3 pont
	A legtávolabbi pontban a sebesség megadása:	2 pont
	A töltések nagyságának helyes meghatározása:	2 pont
	Összesen:	**20 pont**

4. feladat

a)	A fényút vázlatos megadása:	2 pont
	Szögek kapcsolatának felismerése:	2 pont
	A jég üvegre vonatkozó törésmutatójának meghatározása:	2 pont
	Törési törvény helyes alkalmazása:	2 pont
	A szögek és hosszúságok közötti 3 egyenlet helyes felírása:	3×1 pont
	A jég és üveg vastagsági viszonyának helyes megadása:	5 pont
b)	A változás ismertetése:	4 pont
	Összesen:	**20 pont**

A megoldásban vázoltaktól eltérő számításokra, amelyek elvileg helyesek és helyes végeredményre vezetnek, az alkérdésekre adható teljes pontszám jár.