Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny

2000/2001 10. évfolyam 2. kategória 1. forduló

A verseny szervezője: Országos Közoktatási Szolgáltató Intézmény Pedagógiai Központ

1. feladat

Bizonyítsuk be, hogy ha tetszõleges négy egymást követõ pozitív egész szám szorzatához

a) 2000-et hozzáadunk,

b) 2001-et hozzáadunk,

akkor az eredmény sem prímszám, sem pedig négyzetszám nem lehet!

2. feladat

Legyen *e* az *ABC* háromszög *S* súlypontján áthaladó, a csúcsok egyikét sem tartalmazó egyenes. Bizonyítsuk be, hogy az *e* egyenes azonos oldalán lévõ csúcsok *e*-tõl mért távolságainak összege megegyezik a harmadik csúcsnak az *e* egyenestõl mért távolságával!

3. feladat

Oldjuk meg a valós számok körében a következõ egyenletet:

$$\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}+\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}-\frac{1}{\sqrt{x-1}}=\sqrt{x+1}\left(\frac{1+\sqrt{x+1}}{1-\sqrt{x+1}}-\frac{1-\sqrt{x+1}}{1+\sqrt{x+1}}\right)+\sqrt{x-1}.$$

4. feladat

Egy háromszög alapú gúla éleire olyan pozitív egész számokat írtunk, amelyekre igaz, hogy bármelyik csúcsba futó három élre írt számok összege ugyanakkora. Hányféle lehet a gúla éleire írt számok összege, ha az élekre írt számok szorzata 3600?

5. feladat

Melyek azok a nullától különbözõ *a*, *b*, *c* számjegyek, amelyekre minden pozitív egész *n* esetén teljesül, hogy az *n*-jegyû $\overline{aa\ldots a}$ szám négyzetének és az *n*-jegyû $\overline{bb\ldots b}$ számnak az összege egyenlõ a 2*n*-jegyû $\overline{cc\ldots c}$ számmal?