

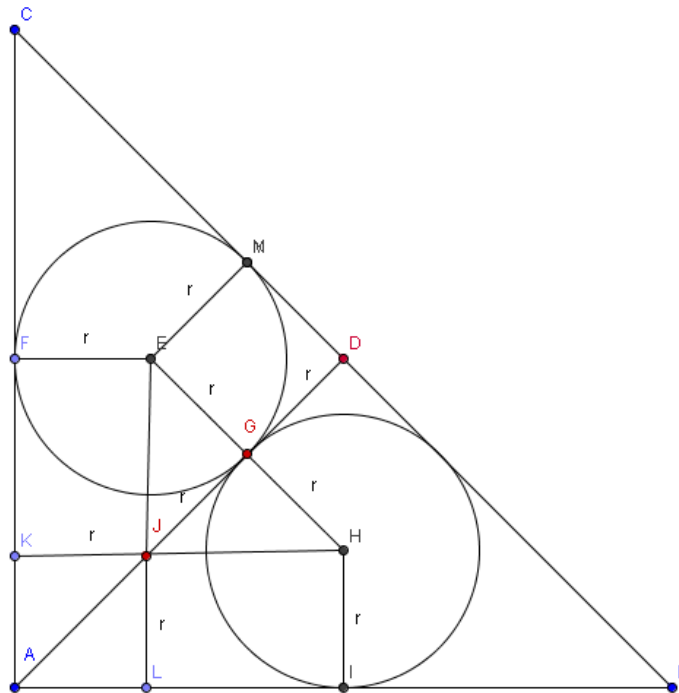
1. Bizonyítsa be, hogy az  $1^{2001} + 2^{2001} + \dots + 1999^{2001} + 2000^{2001}$  összeg osztható 2001-gyel!

Mo:  $1^{2001} + 2000^{2001}$ ;  $2^{2001} + 1999^{2001}$ ; ...;  $1000^{2001} + 1001^{2001}$  összegek oszthatók  $1+2000$ ;  $2+1999$ ; ...;  $1000+1001$ , azaz 2001-gyel.

2. Egy 10cm befogójú egyenlő szárú derékszögű háromszögbe két olyan egyenlő sugarú kört írunk, amelyek érintik egymást és az átfogót, illetve egy-egy befogót. Mekkora a sugár pontos értéke?

Mo: Az ADC egyenlőszárú derékszögű háromszögből  $AD = \frac{10}{\sqrt{2}}$ , másrészt

$AD = AJ + JG + GD$ , amiből  $r\sqrt{2} + r + r = \frac{10}{\sqrt{2}}$ , ebből  $r = 5(\sqrt{2} - 1)cm$



3. Oldja meg a valós számok halmazán a következő egyenletet:  $\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}$ , ahol  $\{z\}$  a  $z$  valós szám törtrészét jelenti!

Mo: Mivel a törtrész  $[0;1)$ -ban van, ezért  $0 \leq \frac{1}{16}x + \frac{1}{32} < 1$ , ebből  $-0,5 \leq x < 15,5$ .

Másrészt  $\left\{\frac{1}{2}x\right\} = \frac{1}{2}x - \left[\frac{1}{2}x\right] = \frac{1}{2}x - k$ , ahol  $k$  egész szám. Így  $\frac{1}{2}x - k = \frac{1}{16}x + \frac{1}{32}$ ,

amiből  $x = \frac{32k+1}{14}$ , ahol  $-0,5 \leq x < 15,5$  miatt  $k$  egész lehet  $0;1;2;3;4;5;6$ .