Adh2-3m 0304

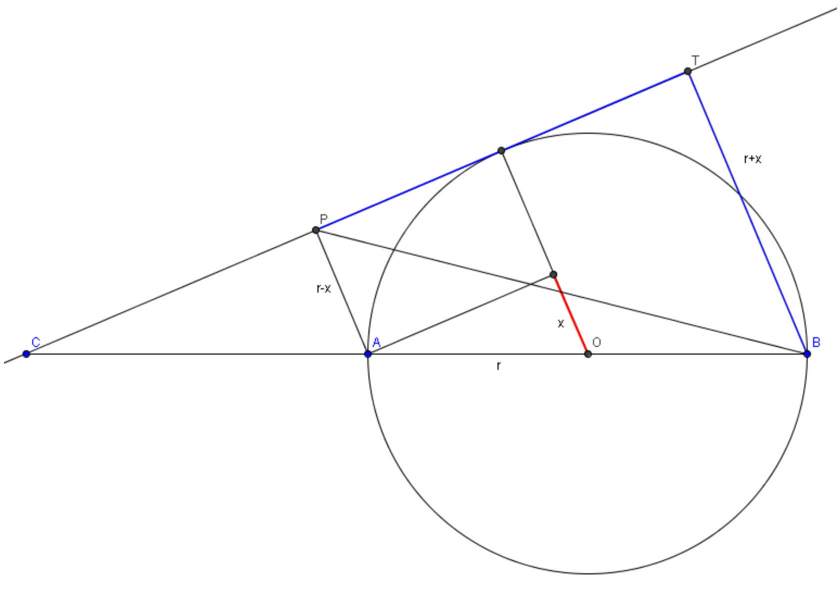
1. Egy valós számokból álló sorozatot a következő rekurzióval adunk meg:
a, $x_1 = 2$;
b, $x_{n+1} = n + x_1^2 + ... + x_n^2$, ha az $n \geq 1$.
Bizonyítsuk be, hogy a sorozat elemei között nincsen négyzetszám!

Mo: $x_{n+2} = n + 1 + x_1^2 + ... + x_n^2 + x_{n+1}^2$. Vonjuk ki ebből a b, egyenletet. $x_{n+2} - x_{n+1} = 1 + x_{n+1}^2$, azaz $x_{n+2} = x_{n+1}^2 + x_{n+1} + 1$. Tegyük fel, hogy $x_{n+2} = k^2$ négyzetszám lenne, ekkor az egyenletet 4-gyel szorozva kapjuk, hogy $4k^2 - 3 = (2x_{n+1} + 1)^2$, amit szorzattá alakítva $(2k + 2x_{n+1} + 1)(2k - 2x_{n+1} - 1) = 3$ egyenlethez jutunk. Mivel a sorozat elemei pozitív egészek, ezért csak a 3*1 felbontás jöhet szóba, amiből k=1 és $x_{n+1} = 0$ jönne ki, ami ellentmondás.

2. Az O középpontú AB átmérőjű r sugarú körhöz az OA félegyenes A ponton túli meghosszabbításának tetszőleges C pontjából érintőt húzunk a körhöz. Legyen az A pontból az érintőre állított merőleges talppontja a P pont. Határozzuk meg a C pontot úgy, hogy a PB távolság a lehető legnagyobb legyen!

Mo: Jelölje x azt a távolságot, amennyivel AP rövidebb r-nél. Ekkor $PT = 2\sqrt{r^2 - x^2}$, így PTB derékszögű háromszögből

$PB^2 = PT^2 + TB^2 = -3x^2 + 2rx + 5r^2 = -3\left(x - \frac{r}{3}\right)^2 + \frac{16r^2}{3}$; ennek x=r/3-nál van maximuma, és PB maximuma $\frac{4r}{\sqrt{3}}$.



3. Legfeljebb hány egész szám adható meg úgy, hogy semelyik kettő összege, semelyik kettő különbsége és semelyik kettő szorzata se legyen osztható 2004-gyel?

Mo: Ha semelyik kettő különbsége nem lehet osztható 2004-gyel, akkor nem lehetnek ugyanabban a maradékosztályban, így legfeljebb 2004 db szám adható meg (0,1,2,…,2003 maradékosztályok). Ha semelyik kettő összege sem lehet osztható 2004-gyel, akkor (1;2003); (2;2002);…;(1001;1003) párokból is az egyik kiesik, így legfeljebb 2004-1001=1003 db szám adható meg. Ha semelyik kettő szorzata sem osztható $2004(=2^2\cdot 3\cdot 167)$ -gyel, akkor a legkevesebb számot akkor vesszük ki, ha a 167-tel osztható számok kerülnek ki és így a szorzat biztosan nem lehet osztható 2004-gyel. A 167-tel osztható számokból 7 van (0,167,334, 501, 668, 835, 1002; vagy a középső 5 helyett a 2004-167, 2004-334, 2004-501, 2004-668, 2004-635).
Tehát legfeljebb 1003-7=996 db szám adható meg, és ez a fentiek szerint meg is valósul.