Bolyai János

Matematikai Társulat

Oktatási Minisztérium
Alapkezelő Igazgatósága
támogatásával

Arany Dániel Matematikai Tanulóverseny
2004/2005-ös tanév
első (iskolai) forduló
haladók – II. kategória
(nem speciális matematika tantervű gimnáziumi tanulók)

Megoldások és javítási útmutató

1. Határozza meg az összes olyan x egész számot, amelyre $x^2 + 19x + 95$ négyzetszám!

Megoldás. A feltétel szerint

$$x^2 + 19x + 95 = y^2$$

$$x^2 + 19x + 95 - y^2 = 0.$$

Ezt az egyenletet x-re megoldva

$$x_{1,2} = \frac{-19 \pm \sqrt{4y^2 - 19}}{2}. \qquad \text{1 pont}$$

Ha x egész szám, akkor $4y^2 - 19$ négyzetszám kell, hogy legyen. 2 pont

$$4y^2 - 19 = z^2$$

$$4y^2 - z^2 = 19$$

$$(2y - z)(2y + z) = 19$$

kell, hogy teljesüljön. 1 pont

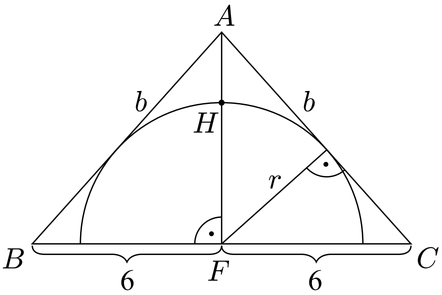
Mivel a 19 prím, két egész szorzatára csak $1 \cdot 19$, $19 \cdot 1$, $(-1) \cdot (-19)$, $(-19) \cdot (-1)$ alakban írható fel, de bármelyik felírásból az $y^2 = 25$ alakhoz jutunk el. 2 pont

Ezt visszahelyettesítve az eredeti egyenletbe az $x = -5$ és az $x = -14$ értékekhez jutunk. 1 pont

Összesen: 7 pont

2. Egy 12 egységnyi alapú egyenlő szárú háromszögbe félkört írunk úgy, hogy a félkör átmérője a háromszög alapján van, a félkör íve pedig érinti a háromszög szárait. Mekkora a félkör sugara, ha a félkörív az alaphoz tartozó magasságot a csúcshoz közelebbi harmadolópontban metszi?

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát:



Az ábra jelöléseit használva a feltételek szerint az $AF = m$ jelölést is bevezetve
$FH = r = \frac{2}{3}m.$

Az FCA derékszögű háromszög területének kétszeresére teljesül, hogy $6m = br$. 1 pont

Mivel $m = \frac{3}{2}r$, ezért $6 \cdot \frac{3}{2}r = br$, azaz $b = 9$. 2 pont

Az AFC derékszögű háromszögre Pitagorasz tételét alkalmazva $FC^2 + FA^2 = AC^2$, azaz

$$6^2 + m^2 = 9^2$$ 1 pont

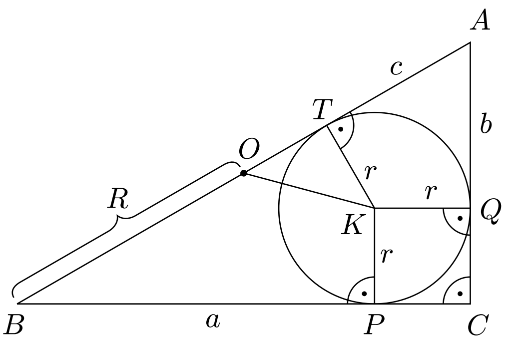
adódik, ahonnan $m = \sqrt{45} = 3\sqrt{5}$ adódik. 1 pont

Ha pedig $r = \frac{2}{3}m$, akkor $r = 2\sqrt{5} = \sqrt{20}$. 2 pont

Összesen: 7 pont

3. Bizonyítsuk be, hogy ha egy derékszögű háromszög körülírt és beírt körének középpontját összekötő egyenes az átfogóval 45°-os szöget zár be, akkor a háromszög egyik szöge 30°-os.

Megoldás. Tekintsük a következő ábrát, ahol $a \geqq b$. :



Ábránk jelölései alapján K a beírt kör középpontja, r a kör sugara, míg O a körülírt kör középpontja, a kör sugara pedig R.

Az A csúcsból húzott érintőszakaszok hossza $b-r$, a B csúcsból húzott érintőszakaszok hossza pedig $a-r$, hiszen a $PCQK$ négyszög négyzet. 1 pont

Mivel $AT=b-r$ és $BT=a-r$, ezért $c=b-r+a-r$, ahonnan $r=\dfrac{a+b-c}{2}$. 1 pont

Thalész tétele miatt $OA=R$, így $OT=R-(b-r)$, azaz

$$OT=\frac{c}{2}-\left(b-\frac{a+b-c}{2}\right)=\frac{a-b}{2}.$$ 1 pont

A feltétel szerint $TOK\sphericalangle=45^\circ$, ezért $OT=KT$, így $\dfrac{a-b}{2}=\dfrac{a+b-c}{2}$. 1 pont

A kapott összefüggésből $c=2b$ adódik. 1 pont

Ha pedig egy derékszögű háromszögben $c=2b$, akkor a BC oldalra vonatkozó tükrözéssel közvetlenül adódik (az ABA' háromszög szabályos volta miatt), hogy $ABC\sphericalangle=30^\circ$, ahol A' az A csúcs tükörképe. 2 pont

---

Összesen: 7 pont

4. Bizonyítsuk be, hogy

a) $2^{2004}+2$ nem lehet két négyzetszám összege,

b) $2^{2005}+2$ pedig felbontható két négyzetszám összegére.

Megoldás.
a) $2^{2004}+2$ osztható 3-mal, mert 2-nek a 3-as maradéka -1, így $2^{2004}+2$ maradéka $(-1)^{2004}+2$, azaz 3, ami 0 maradéknak felel meg. 1 pont

$2^{2004}+2=\left(2^6\right)^{334}+2$ alapján a 9-es maradékot vizsgálva $2^{2004}+2=64^{334}+2$ 9-es maradéka $1+2=3$, hiszen 64 maradéka 9-cel osztva 1. 1 pont

Az előzőek alapján $2^{2004}+2=9k+3$ alakú, ahol k pozitív egész szám.

Tehát $2^{2004}+2=x^2+y^2$ esetén ($x\in\mathbb{Z}$, $y\in\mathbb{Z}$)

(1) $$x^2+y^2=9k+3$$

alakú. 1 pont

Egy négyzetszám 3-as maradéka csak 0 vagy 1 lehet, ezért az (1) egyenlet alapján $x=3a$, $y=3b$-nek kell teljesülnie, ahol $a\in\mathbb{N}$, $b\in\mathbb{N}$. Ekkor viszont $9(a^2+b^2)=3(3k+1)$ adódik, ami lehetetlen, hiszen a bal oldal osztható 9-cel, a jobb oldal pedig nem. 1 pont

$b)$ Az $(a-b)^2+(a+b)^2=2(a^2+b^2)$ azonosságra gondolva

$$(a-1)^2+(a+1)^2=a^2+a^2+2=2a^2+2.$$ 1 pont

Ha most $a=2^{1002}$, $b=1$, akkor

$$\left(2^{1002}-1\right)^2+\left(2^{1002}+1\right)^2=2\cdot 2^{2004}+2=2^{2005}+2,$$

ami nyilvánvalóan egy megfelelő előállítás. 2 pont

Összesen: 7 pont

Megjegyzés: a $b)$ részre bármilyen megfelelő előállítás esetén is 3 pont adható.

5. Négy valós számból páronként kéttagú összegeket képzünk. A hat összeg közül négy darab racionális, kettő irracionális. Bizonyítsuk be, hogy ekkor az eredeti négy szám összege racionális.

Megoldás. Az eredeti négy szám

– mindegyike nem lehet racionális a feltétel miatt,

– közül nem lehet pontosan három racionális, mert ekkor az összegek között három irracionális lenne, 1 pont

– közül nem lehet kettő racionális és kettő irracionális, mert ekkor legalább négy összeg irracionális lenne,

– közül nem lehet pontosan egy racionális, mert ekkor legalább három összeg irracionális lenne. 1 pont

Tehát mind a négy szám csak irracionális lehet. 1 pont

A négy irracionális szám legyen i_1, i_2, i_3, i_4! Ekkor két eset lehetséges az összegeket tekintve. Vagy két azonos tagot tartalmazó összeg értéke irracionális, vagy pedig két-két különböző tag összege irracionális értékű. 1 pont

Az első eset lehetetlen, mert például $i_1+i_2=i'$, $i_1+i_3=i''$ esetén i_1+i_4, i_2+i_3, i_2+i_4, i_3+i_4 is racionális, ezért a négy összeg alapján $i_4=r_1-i_1$, $i_3=r_2-i_2$, így $i_2+i_4=r_1+(i_2-i_1)$ és $i_3+i_4=r_1+r_2-(i_1+i_2)$. Ha pedig i_2+i_4 és i_3+i_4 is racionális szám, akkor ez valóban lehetetlen. 1 pont

A második esetben például $i_1+i_2=r_1$ és $i_3+i_4=r_2$, ekkor viszont $i_1+i_2+i_3+i_4=r_1+r_2$, ami racionális szám, ezért a feladat állítása helyes. 1 pont

Egy megfelelő előállítás például: $\sqrt{2}$, $1+\sqrt{2}$, $-\sqrt{2}$, $1-\sqrt{2}$. 1 pont

Összesen: 7 pont